不定積分 $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$ を求めよ．

(21 山形大 医・理 5(3))

【答】 $-\dfrac{1}{2}e^{-x}(\cos x-\sin x)+C$ （C は積分定数）

【解答】

$I=\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$，$J=\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx$ とおき，それぞれに部分積分法を用いると

$$I=(-e^{-x})\cdot\cos x-\int(-e^{-x})\cdot(-\sin x)\,dx=-e^{-x}\cos x-J$$

$$\therefore\quad I+J=-e^{-x}\cos x+C_1\quad(C_1\text{は積分定数})\qquad\cdots\cdots ①$$

また

$$J=(-e^{-x})\cdot\sin x-\int(-e^{-x})\cdot\cos x\,dx=-e^{-x}\sin x+I$$

$$\therefore\quad I-J=e^{-x}\sin x+C_2\quad(C_2\text{は積分定数})\qquad\cdots\cdots ②$$

① + ② より

$$2I=-e^{-x}(\cos x-\sin x)+C_1+C_2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x-\sin x)+C\quad(C\text{ は積分定数})}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $e^{-x}\cos x$，$e^{-x}\sin x$ をそれぞれ x で微分して，原始関数を求める．

  $$(e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x\qquad\cdots\cdots ③$$

  $$(e^{-x}\sin x)'=e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x\qquad\cdots\cdots ④$$

  ③ − ④ より

  $$(e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x)'=-2e^{-x}\cos x$$

  $$\therefore\quad\int e^{-x}\cos x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x-\sin x)+C\quad（C\text{ は積分定数}）$$

  である．

- もちろん，部分積分を 2 回行ってもよい．

  $$\begin{aligned}I&=(-e^{-x})\cdot\cos x-\int(-e^{-x})\cdot(-\sin x)\,dx\\&=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cdot\sin x\,dx\\&=-e^{-x}\cos x-\left\{(-e^{-x})\cdot\sin x-\int(-e^{-x})\cdot\cos x\,dx\right\}\\&=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x-I\end{aligned}$$

  であるから

  $$2I=-e^{-x}(\cos x-\sin x)+D\quad（D\text{ は積分定数}）$$

  $$\therefore\quad\int e^{-x}\cos x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x-\sin x)+C\quad（C\text{ は積分定数}）$$

  である．