定積分と漸化式

自然数 n に対して，

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) I_1，I_2 をそれぞれ求めよ．

(2) $n \geqq 3$ に対して，

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt < \frac{2}{5}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

(21 愛知県大 情報科学 3)

【答】

(1) $I_1 = 1$，$I_2 = \dfrac{\pi}{4}$

(2) 略

(3) $n = 5$

【解答】

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

(1) 積分を実行すると

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos^{n-1} x\,dx \\ &= \Big[\sin x \cdot \cos^{n-1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot (n-1)\cos^{n-2} x \cdot (-\sin x)\,dx \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cdot \cos^{n-2} x\,dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

I_n について整理すると

$$\{1+(n-1)\}I_n = (n-1)I_{n-2}$$
$$\therefore \quad I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n \geqq 3)$$

……(証明終わり)

(3) $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt$ において，$t=\sin x$ とおくと

$dt = \cos x\,dx$

t	$0 \longrightarrow 1$
x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

であるから

$$\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^n \cdot \cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = I_{2n+1}$$

$I_{(\text{奇数})}$ を順次求める．(1)，(2) より

$$I_1 = 1 \ \left(> \frac{2}{5}\right)$$
$$I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3} \ \left(> \frac{2}{5}\right)$$
$$I_5 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5} \ \left(> \frac{2}{5}\right)$$
$$I_7 = \frac{6}{7}I_5 = \frac{6}{7}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{7}\cdot\frac{2}{5} \ \left(> \frac{2}{5}\right)$$
$$I_9 = \frac{8}{9}I_7 = \frac{8}{9}\cdot\left(\frac{8}{7}\cdot\frac{2}{5}\right) = \frac{64}{63}\cdot\frac{2}{5} \ \left(> \frac{2}{5}\right)$$
$$I_{11} = \frac{10}{11}I_9 = \frac{10}{11}\cdot\left(\frac{64}{63}\cdot\frac{2}{5}\right) = \frac{640}{693}\cdot\frac{2}{5} \ \left(< \frac{2}{5}\right)$$

より，最小の自然数 n は

$$2n+1 = 11 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{n=5}$$

……(答)