次の定積分を求めよ．

$$J = \int_0^1 x^3 \log(x^2+1)\,dx$$

(21 神戸大 理 2(2))

【答】 $\dfrac{1}{8}$

【解答】

$t = x^2+1$ とおくと

$$dt = 2x\,dx \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline t & 1 & \longrightarrow & 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \log(x^2+1)\cdot 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 (t-1)\log t\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\log t\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{t^2}{2}-t\right)\cdot\frac{1}{t}\,dt\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{t}{2}-1\right)\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{4}-t\right]_1^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

$\cdots\cdots$(答)

である．

- 部分積分法を利用することもできる．

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{x^4-1}{4}\log(x^2+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^4-1}{4}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-1)x\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

である．