

以下の問に答えなさい。

- (1) 不定積分  $\int \frac{1}{3-x} dx$  を求めなさい。  
 (2) 不定積分  $\int \frac{1}{9-x^2} dx$  を求めなさい。  
 (3) 定積分  $\int_1^2 \frac{1}{x^2} \log \sqrt{9-x^2} dx$  の値を求めなさい。

(21 福岡女大 国際文理 (環境) 6)

【答】

- (1)  $-\log |3-x| + C$  ( $C$  は積分定数)  
 (2)  $\frac{1}{6} \log \left| \frac{3+x}{3-x} \right| + C$  ( $C$  は積分定数)  
 (3)  $\frac{5}{3} \log 2 - \frac{5}{12} \log 5$

【解答】

- (1) 与えられた不定積分は

$$\int \frac{1}{3-x} dx = -\log |3-x| + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- (2) 部分分数分解すると

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{9-x^2} dx &= \int \frac{1}{(3-x)(3+x)} dx \\ &= \frac{1}{6} \int \left( \frac{1}{3+x} + \frac{1}{3-x} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} (\log |3+x| - \log |3-x|) + C \\ &= \frac{1}{6} \log \left| \frac{3+x}{3-x} \right| + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

である。

- (3) 与えられた定積分は

$$\begin{aligned} &\int_1^2 \frac{1}{x^2} \log \sqrt{9-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( -\frac{1}{x} \right) \cdot \log(9-x^2) \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 \left( -\frac{1}{x} \right) \cdot \frac{(-2x)}{9-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \log 5 + \log 8 \right) - \int_1^2 \frac{1}{9-x^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \log 2 - \frac{1}{4} \log 5 - \left[ \frac{1}{6} \log \left| \frac{3+x}{3-x} \right| \right]_1^2 \quad (\because (2)) \\ &= \frac{3}{2} \log 2 - \frac{1}{4} \log 5 - \frac{1}{6} (\log 5 - \log 2) \\ &= \frac{5}{3} \log 2 - \frac{5}{12} \log 5 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

である。