定積分で表された関数

関数 $f(x)=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(t-x)\cos t\,dt$ について，次の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．
(2) $\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ の範囲における $f(x)$ の最大値を求めよ．

(21 福岡大 工 3)

【答】

(1) $f'(x)=1-\sin x$
(2) $\dfrac{\pi}{2}-1$

【解答】

$$f(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(t-x)\cos t\,dt$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}t\cos t\,dt-x\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cos t\,dt \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) x で微分すると

$$f'(x)=x\cos x-1\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cos t\,dt-x\cdot\cos x$$
$$=-\Big[\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$
$$=\boldsymbol{1-\sin x} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) (1) より

$$f(x)=x+\cos x+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であり，① において $x=\dfrac{\pi}{2}$ とおくと

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0-0=0 \quad \text{だから} \quad C=-\frac{\pi}{2}$$

すなわち

$$f(x)=x+\cos x-\frac{\pi}{2}$$

である．$f'(x)=1-\sin x\geqq 0$ なので，$f(x)$ は単調増加であり，$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ における最大値は

$$f(\pi)=\pi-1-\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}-1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 【解答】のように，微分し初期条件から関数を決定するというのが，この手の積分方程式の典型的な流れであるが，本問では ① の計算を実行してもよい．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t\cos t\,dt - x\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cos t\,dt \\
&= \Big[t\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 1\cdot\sin t\,dt - x\Big[\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{x} \\
&= x\sin x - \frac{\pi}{2} - \Big[-\cos t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{x} - x\sin x + x \\
&= x + \cos x - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$