定積分と不等式，積分による e の定義

いわゆる「自然対数の底」を

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

という極限として定義するとき，その値はおよそ 2.718 で，とくに3 を超えないことが知られている．本問では別の視点からこの事実を再考したい．次の問いに答えよ．

(1) 連続関数 $f(x)$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $f(x)+f(-x) \geqq 2f(0)$ を満たすとする．このとき

$$\int_1^3 f(x-2)\,dx \geqq 2f(0)$$

が成り立つことを示せ．

(2) e という数を $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$ を満たす 1 より大きい実数として定義する．このとき，$e \leqq 3$ を示せ．

(21 大阪市大 後 工・理 4)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

(1) $I = \displaystyle\int_1^3 f(x-2)\,dx$ とおき，$x-2=t$ とおくと

$$dx = dt \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 1 & \longrightarrow & 3 \\ \hline t & -1 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

$$I = \int_{-1}^1 f(t)\,dt = \int_{-1}^0 f(t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt$$

ここで $\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)dt$ において $t=-u$ とおくと

$$dt = -du \qquad \begin{array}{c|ccc} t & -1 & \longrightarrow & 0 \\ \hline u & 1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\int_{-1}^0 f(t)\,dt = \int_1^0 f(-u)(-1)\,du = \int_0^1 f(-u)\,du$$

となるから

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(-u)\,du + \int_0^1 f(t)\,dt \\ &= \int_0^1 f(-x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \{f(-x)+f(x)\}\,dx \\ &\geqq \int_0^1 2f(0)\,dx \\ &= 2f(0)\Big[x\Big]_0^1 \\ &= 2f(0) \end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\int_1^3 f(x-2)\,dx \geqq 2f(0)$ が成り立つ． …… (証明終わり)

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ とすると，この $f(x)$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ で連続であり

$$\begin{aligned} &f(x)+f(-x)-2f(0) \\ &= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{-x+2} - 2\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{(2+x)(2-x)} - 1 \\ &= \frac{x^2}{4-x^2} \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

を満たす．すなわち

$$f(x)+f(-x) \geqq 2f(0)$$

を満たしている．(1) の結果を使うことができ

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)+2}\,dx \geqq 2\cdot\frac{1}{0+2}$$

$$\therefore\quad \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx \geqq 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．e は $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$ を満たす実数であるから，① は

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx \geqq \int_1^e \frac{1}{x}\,dx \qquad \cdots\cdots ②$$

と表すことができる．

ここで，$g(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{1}{x}\,dx\ (t \geqq 1)$ とおくと，関数 $g(t)$ は $g'(t) = \dfrac{1}{t} > 0$ より，単調増加である．② は $g(3) \geqq g(e)$ であるから

$$e \leqq 3$$

が成り立つ． …… (証明終わり)