2 曲線 $C_1 : y = e^{ax}$，$C_2 : y = a\log x + b$ は，x 座標が t $(0 < t < 1)$ の点で接していて，$a \fallingdotseq 0$ であるとする．ただし，2 曲線が点 P で接するとは，P を共有し，P における接線が一致することである．

(1) a および b を t の式で表せ．

(2) 曲線 C_1 と x 軸，y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{t\to 1-0} S_1(t)$ を求めよ．

(3) 曲線 C_2 と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{t\to 1-0} S_2(t)$ を求めよ．

(21 千葉大 8)

【答】

(1) $a = -\dfrac{\log t}{t}$，$b = \dfrac{1 + (\log t)^2}{t}$

(2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-0} S_1(t) = 1$

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 1-0} S_2(t) = 1$

【解答】

$$a \fallingdotseq 0$$

$$C_1 : y = e^{ax}$$

$$C_2 : y = a\log x + b$$

(1) $f_1(x) = e^{ax}$，$f_2(x) = a\log x + b$ とおくと

$$f_1{}'(x) = ae^{ax}, \quad f_2{}'(x) = \frac{a}{x}$$

である．C_1，C_2 は $x = t$ $(0 < t < 1)$ の点で接しているから

$$\begin{cases} f_1(t) = f_2(t) & (\because\ x = t \text{ で点を共有}) \\ f_1{}'(t) = f_2{}'(t) & (\because\ x = t \text{ での接線の傾きが一致}) \end{cases}$$

が成り立つ．

$$\begin{cases} e^{at} = a\log t + b \\ ae^{at} = \dfrac{a}{t} \end{cases} \iff \begin{cases} b = \dfrac{1}{t} - a\log t \\ at = \log\dfrac{1}{t} \end{cases} \quad \left(\because\ a \fallingdotseq 0 \text{ より } e^{at} = \frac{1}{t} \cdots\cdots ①\right)$$

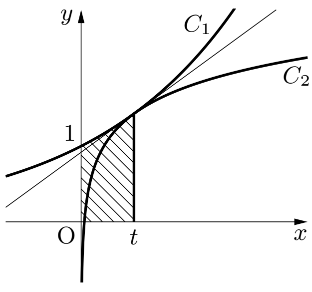
よって

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{t}\log\frac{1}{t} = -\frac{\log t}{t}} \quad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\boldsymbol{b = \frac{1}{t} + \frac{\log t}{t}\cdot\log t = \frac{1 + (\log t)^2}{t}} \quad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 曲線 C_1 と x 軸，y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分は右図の斜線部分であり，面積 $S_1(t)$ は



$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_0^t e^{ax}\,dx = \left[\frac{e^{ax}}{a}\right]_0^t = \frac{e^{at} - 1}{a} \\ &= \frac{\frac{1}{t} - 1}{-\frac{\log t}{t}} \quad (\because\ ①,\ ②) \\ &= \frac{t - 1}{\log t} \end{aligned}$$

である．$g(x) = \log x$ とおくと $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ であり

$$\lim_{t \to 1-0} S_1(t) = \lim_{t \to 1-0} \frac{1}{\dfrac{\log t}{t-1}} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{\dfrac{1}{1}} = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

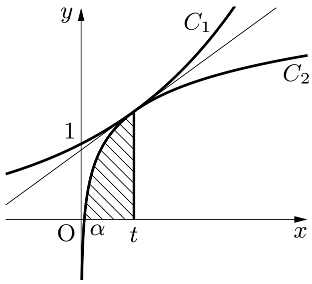
である．

- e の定義に持ち込んでもよい．
  - ○ $\displaystyle\lim_{t \to 1-0} S_1(t) = \lim_{t \to 1-0} \left(\frac{e^{at}-1}{at} \cdot t \right) = 1 \cdot 1 = 1$ である．
  - ○ $h = t - 1$ とおくと $t \to 1-0$ のとき $h \to 0-0$ であるから

$$\lim_{t \to 1-0} S_1(t) = \lim_{t \to 1-0} \frac{1}{\dfrac{\log t}{t-1}} = \lim_{t \to 1-0} \frac{1}{\dfrac{\log(1+h)}{h}} = \frac{1}{1} = 1$$

である．

(3) 曲線 C_2 と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分は右図の斜線部分である．$a\log x + b = 0$ となる x を α とおくと



$$a \log \alpha + b = 0$$

$$\therefore \quad \alpha = e^{-\frac{b}{a}} = e^{\frac{1+(\log t)^2}{\log t}} \quad (\because ②,\ ③) \qquad \cdots\cdots ④$$

である．斜線部分の面積 $S_2(t)$ は

$$\begin{aligned}
S_2(t) &= \int_\alpha^t (a\log x + b)\,dx \\
&= \Big[a(x\log x - x) + bx \Big]_\alpha^t \\
&= a(t\log t - t) - a(\alpha\log\alpha - \alpha) + b(t - \alpha) \\
&= a(t\log t - \alpha\log\alpha) - a(t-\alpha) + b(t-\alpha) \\
&= a(t\log t - \alpha\log\alpha) + (b-a)(t-\alpha) \\
&= -\frac{\log t}{t}\left\{ t\log t - e^{\frac{1+(\log t)^2}{\log t}} \cdot \frac{1+(\log t)^2}{\log t} \right\} \\
&\qquad + \left\{ \frac{1+(\log t)^2}{t} + \frac{\log t}{t} \right\}\left\{ t - e^{\frac{1+(\log t)^2}{\log t}} \right\} \quad (\because ②,\ ③,\ ④) \\
&= -(\log t)^2 + e^{\frac{1+(\log t)^2}{\log t}} \cdot \frac{1+(\log t)^2}{t} \\
&\qquad + 1 + (\log t)^2 + \log t - \frac{1+(\log t)^2+\log t}{t} \cdot e^{\frac{1+(\log t)^2}{\log t}} \\
&= 1 + \log t - \frac{\log t}{t} \cdot e^{\frac{1+(\log t)^2}{\log t}}
\end{aligned}$$

である．

$$\lim_{t \to 1-0} \log t = 0$$

$$\lim_{t \to 1-0} \frac{\log t}{t} = 0$$

$$\lim_{t \to 1-0} e^{\frac{1+(\log t)^2}{\log t}} = 0 \quad \left(\because \lim_{t \to 1-0} \frac{1+(\log t)^2}{\log t} = -\infty \right)$$

であるから

$$\lim_{t \to 1-0} S_2(t) = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．