次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 関数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ の増減および漸近線を調べて，グラフの概形をかけ．

(2) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ を x について解け．

(3) 曲線 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(21 弘前大 理工 4)

【答】

(1) 漸近線は $y=\pm 1$，グラフは略

(2) $x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}$

(3) $\dfrac{3}{4}\log 3-\log 2$

【解答】

(1)
$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

微分して

$$\begin{aligned}y'&=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e'+e^{-x})^2}\\&=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}\end{aligned}$$

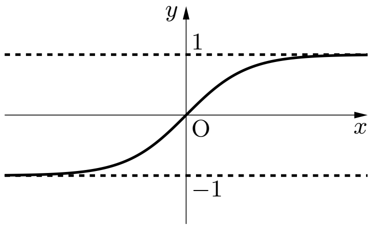
$y'>0$ であるから，y は単調に増加する．また

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1$$

であるから，漸近線は $y=\pm 1$ である．

さらに，$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}=-f(x)$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称である．

よって，グラフの概形は右のようになる．

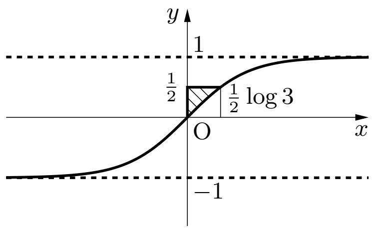


(2)
$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$
$$y(e^{2x}+1)=e^{2x}-1$$
$$\therefore\quad (1-y)e^{2x}=1+y$$

(1) より $-1<y<1$ であるから

$$e^{2x}=\frac{1+y}{1-y}$$
$$2x=\log\frac{1+y}{1-y}$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{x=\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．



(3) 曲線 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ と直線 $y = \dfrac{1}{2}$ および y 軸で囲まれた部分は右の図の斜線部分である．

よって，求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{1}{2}} x\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \log\frac{1+y}{1-y}\,dy \quad (\because\ (2)) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \{\log(1+y) - \log(1-y)\}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \{(1+y)'\log(1+y) + (1-y)'\log(1-y)\}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\left\{\Big[(1+y)\log(1+y)\Big]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} dy + \Big[(1-y)\log(1-y)\Big]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} dy\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\log\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{3}{4}\log 3 - \log 2} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

である．

- $y = \dfrac{1}{2}$ のとき，(2) から $x = \dfrac{1}{2}\log 3$ であるから

$$
\begin{aligned}
S &= \left(\frac{1}{2}\log 3\right)\cdot\frac{1}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}\log 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\log 3 - \Big[\log\left|e^x + e^{-x}\right|\Big]_0^{\frac{1}{2}\log 3} \\
&= \frac{1}{4}\log 3 - \log\left(e^{\frac{1}{2}\log 3} + e^{-\frac{1}{2}\log 3}\right) + \log 2 \\
&= \frac{1}{4}\log 3 - \log\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \log 2 \\
&= \frac{1}{4}\log 3 - \log\frac{4}{\sqrt{3}} + \log 2 \\
&= \frac{3}{4}\log 3 - \log 2
\end{aligned}
$$

である．