$a>0$ に対して $f(x)=\dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ とする．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線を ℓ とし，直線 ℓ，直線 $x=0$，曲線 $y=f(x)$ で囲まれる領域を D とする．

(1) 直線 ℓ の y 切片を a を用いて表せ．
(2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 ℓ は，点 P 以外に共有点を持たないことを示せ．
(3) 領域 D の面積を a を用いて表せ．
(4) 領域 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を a を用いて表せ．

(21 札幌医大 4)

【答】

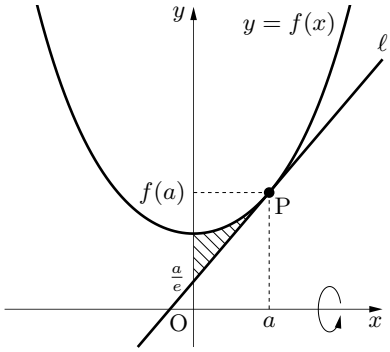
(1) $\dfrac{a}{e}$
(2) 略
(3) $\dfrac{a^2}{4}\left(e-\dfrac{5}{e}\right)$
(4) $\dfrac{\pi a^3}{24}\left(e^2+4-\dfrac{17}{e^2}\right)$

【解答】

$$a>0,\quad f(x)=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$$

(1) 微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}-\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right)\\&=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})\end{aligned}$$



曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

であり，ℓ の y 切片は，$x=0$ を代入したときの y の値である．すなわち

$$\begin{aligned}&-af'(a)+f(a)\\&=-\frac{a}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)+\frac{a}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{a}{e}}\end{aligned}$$

……(答)

である．

(2) $y=f(x)$ と $\ell: y=f'(a)x+\dfrac{a}{e}$ を連立すると

$$f(x)=f'(a)x+\frac{a}{e}$$
$$f(x)-f'(a)x-\frac{a}{e}=0$$

$g(x)=f(x)-f'(a)x-\dfrac{a}{e}$ とおき，$g(x)=0$ の解が $x=a$ のみであることを示す．

$$g'(x)=f'(x)-f'(a)$$
$$g''(x)=f''(x)=\frac{1}{2a}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})>0\quad(\because\ a>0)$$

であり，$g'(x)$ は単調増加である．さらに，$g'(a)=f'(a)-f'(a)=0$ であるから，$g'(x)$ の符号は $x=a$ で負から正に変わる．すなわち，$g(x)$ は $x=a$ で極小かつ最小となる．

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a)-f'(a)a-\frac{a}{e} \\ &= \frac{a}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)-\frac{a}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)-\frac{a}{e} \\ &= \frac{a}{e}-\frac{a}{e} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって，$g(x)=0$ の解は $x=a$ のみであり，題意は示された． ……(証明終わり)

(3) (2) より，$y=f(x)$ と ℓ は，$x=a$ で共有点をもち，$x \neq a$ では $y=f(x)$ は ℓ の上側にある．領域 D は図の斜線部分であり，面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \left\{f(x)-f'(a)x-\frac{a}{e}\right\}dx \\ &= \left[\frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)-\frac{f'(a)}{2}x^2-\frac{a}{e}x\right]_0^a \\ &= \frac{a^2}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)-\frac{a^2}{e} \\ &= \frac{a^2}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)-\frac{a^2}{e} \\ &= \boldsymbol{\frac{a^2}{4}\left(e-\frac{5}{e}\right)} \end{aligned}$$

……(答)

である．

(4) 求める体積 V は

$$V=\int_0^a \pi\{f(x)\}^2\,dx-\int_0^a \pi\left\{f'(a)x+\frac{a}{e}\right\}^2 dx$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^a \{f(x)\}^2\,dx &= \int_0^a \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx \\ &= \frac{a^2}{4}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]_0^a \\ &= \frac{a^2}{4}\left(\frac{a}{2}e^2+2a-\frac{a}{2}e^{-2}\right) \\ &= \frac{a^3}{8}\left(e^2+4-\frac{1}{e^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^a \left\{f'(a)x+\frac{a}{e}\right\}^2 dx &= \int_0^a \left\{\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)^2x^2+\frac{a}{e}\left(e-\frac{1}{e}\right)x+\frac{a^2}{e^2}\right\}dx \\ &= \left[\frac{1}{12}\left(e^2-2+\frac{1}{e^2}\right)x^3+\frac{a}{2e}\left(e-\frac{1}{e}\right)x^2+\frac{a^2}{e^2}x\right]_0^a \\ &= \frac{a^3}{12}\left\{\left(e^2-2+\frac{1}{e^2}\right)+\frac{6}{e}\left(e-\frac{1}{e}\right)+\frac{12}{e^2}\right\} \\ &= \frac{a^3}{12}\left(e^2+4+\frac{7}{e^2}\right) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} V &= \pi\left\{\frac{a^3}{8}\left(e^2+4-\frac{1}{e^2}\right)-\frac{a^3}{12}\left(e^2+4+\frac{7}{e^2}\right)\right\} \\ &= \frac{\pi a^3}{24}\left\{3\left(e^2+4-\frac{1}{e^2}\right)-2\left(e^2+4+\frac{7}{e^2}\right)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi a^3}{24}\left(e^2+4-\frac{17}{e^2}\right)} \end{aligned}$$

……(答)

である．