関数 $f(x) = x^3 - 2x$ について以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ を解け．
(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．
(3) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ．
(4) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた二つの部分の面積の和 S を求めよ．
(5) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた二つの部分を，それぞれ x 軸のまわりで 1 回転させてできる二つの立体の体積の和 V を求めよ．

(21 豊橋技科大 3)

【答】

(1) $x = 0,\quad \pm\sqrt{2}$
(2) 極大値 $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，極小値 $-\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$
(3) $(0,\ 0)$
(4) $S = 2$
(5) $V = \dfrac{128}{105}\sqrt{2}\pi$

【解答】

$$f(x) = x^3 - 2x$$

(1) $f(x) = 0$ を解くと

$$x(x^2 - 2) = 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x = 0,\ \pm\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2)(3) $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$
$$f''(x) = 6x$$

であり，$f(x)$ の増減，凹凸は下表となる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$	↘	0	↘	$-\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$	↗

よって

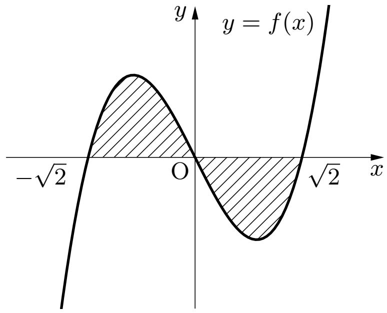
$$x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ のとき，極大値 } \boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ のとき，極小値 } \boldsymbol{-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

変曲点は (0, 0) ……(答)

である．

(4) (1)，(2) と $f(x)$ が奇関数であることより，グラフは右図のようになり，二つの斜線部分の面積の和 S は



$$
\begin{aligned}
S &= 2\int_0^{\sqrt{2}} \{-f(x)\}\,dx \\
&= 2\int_0^{\sqrt{2}} (2x - x^3)\,dx \\
&= 2\left[x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= 2(2-1) \\
&= \mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．

(5) 二つの斜線部分を x 軸のまわりで 1 回転させてできる二つの立体の体積の和 V は

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_0^{\sqrt{2}} \pi\{f(x)\}^2\,dx \\
&= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} (x^6 - 4x^4 + 4x^2)\,dx \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= 2\pi\left(\frac{8\sqrt{2}}{7} - \frac{16\sqrt{2}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{3}\right) \\
&= 2\pi\frac{(15-42+35)8\sqrt{2}}{105} \\
&= \boldsymbol{\frac{128}{105}\sqrt{2}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．