正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形であるものの個数を求めよ．

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ．

(3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，次の条件 $(*)$ を満たすものの個数を求めよ．

$(*)$　四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる．

(21 東北大 理 3 文 2)

【答】

(1) 24
(2) 16
(3) 54

【解答】

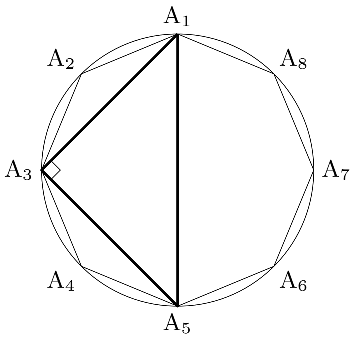
(1) 正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の 3 個の頂点を結んでできる三角形が直角三角形になるのは，1 つの辺が正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の外接円の直径となる場合である．

線分 A_1A_5 を斜辺にもつ直角三角形の A_1，A_5 以外の頂点の選び方は 6 通りある．

線分 A_2A_6，A_3A_7，A_4A_8 を斜辺にもつ場合も同様であるから，直角三角形の個数は

$$6\times 4=\mathbf{24}\ (\text{個}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



(2) 正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の 3 個の頂点を結んでできる三角形の個数は全部で

$${}_8C_3=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=56\ (\text{個})$$

である．

これらから直角三角形と二等辺三角形を除く．直角三角形は (1) で数えてあるので，直角二等辺三角形でない二等辺三角形の個数を求める．

A_1 を頂角とする二等辺三角形は，$A_1A_2A_8$，$A_1A_3A_7$，$A_1A_4A_6$ の 3 個があり，どれも正三角形ではないが，$A_1A_3A_7$ は直角二等辺三角形である．他の頂点を頂角とする二等辺三角形も同様であるから，直角二等辺三角形でない二等辺三角形の個数は

$$(3-1)\times 8=16\ (\text{個})$$

である．

よって，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数は

$$56-(24+16)=\mathbf{16}\ (\text{個}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，与えられた条件 $(*)$ を満たすものは，四角形の辺の 1 つ，または対角線の 1 つが正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の外接円の直径となる場合である．

(i) 四角形の辺の 1 つが正八角形 $A_1A_2 \cdots A_8$ の外接円の直径となる場合：

線分 A_1A_5 を 1 つの辺にもつ四角形は，A_1, A_5 以外の 2 つの頂点の選び方を考えると，${}_3C_2 \times 2 = 6$ 個ある．線分 A_2A_6，A_3A_7，A_4A_8 を 1 つの辺にもつ四角形も同様であるから，辺の 1 つが正八角形 $A_1A_2 \cdots A_8$ の外接円の直径となる四角形の個数は

$$6 \times 4 = 24 \text{ (個)}$$

である．

(ii) 四角形の対角線の 1 つが正八角形 $A_1A_2 \cdots A_8$ の外接円の直径となる場合：

線分 A_1A_5 を 1 つの対角線にもつ四角形は，A_1, A_5 以外の 2 つの頂点の選び方を考えると，${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 9$ 個ある．線分 A_2A_6，A_3A_7，A_4A_8 を 1 つの対角線にもつ四角形も同様であるが，2 つの対角線がともに直径となる四角形が全部で ${}_4C_2 = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ 個あるから，対角線の 1 つが正八角形 $A_1A_2 \cdots A_8$ の外接円の直径となる四角形の個数は全部で

$$9 \times 4 - 6 = 30 \text{ (個)}$$

である．

(i)，(ii) まとめて，$(*)$ を満たす四角形の個数は

$$24 + 30 = \mathbf{54} \text{ (個)}$$ ……(答)

である．

- 正八角形 $A_1A_2 \cdots A_8$ の 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，与えられた条件 $(*)$ を満たすものは，辺の 1 つ，または対角線の 1 つが正八角形 $A_1A_2 \cdots A_8$ の外接円の直径となる場合である．

  線分 A_1A_5 を辺または対角線にもつ四角形の個数は，残り 2 つの頂点の選び方を考えて

  $${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \text{ (個)}$$

  である．線分 A_2A_6，A_3A_7，A_4A_8 を辺または対角線にもつ四角形についても同様であるが，2 つの対角線がともに直径となる四角形が，${}_4C_2 = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ 個あるから，$(*)$ を満たす四角形の個数は

  $$15 \times 4 - 6 = 54 \text{ (個)}$$

  である．

- 四角形に個数は全部で

  $${}_8C_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \text{ (個)}$$

  であり，このうち $(*)$ を満たさないものは $\{A_1, A_5\}$，$\{A_2, A_6\}$，$\{A_3, A_7\}$，$\{A_4, A_8\}$ から 1 つずつ頂点を選ぶときであるから，この個数は

  $$2^4 = 16 \text{ (個)}$$

  である．よって，$(*)$ を満たす四角形の個数は

  $$70 - 16 = 54 \text{ (個)}$$

  である．