‘0’ と 1 文字だけ書かれたカードが 4 枚，‘1’ と 1 文字だけ書かれたカードが 4 枚ある．この 8 枚のカードすべてを横一列に並べ，それを二進法で表された数とみなす．1 である最大の桁より大きい桁の 0 は無視するものとし，例えば，‘0’, ‘1’, ‘1’, ‘1’, ‘0’, ‘0’, ‘0’, ‘1’ の順にカードを並べたときは，$1110001_{(2)}$ となる．次の設問に答えなさい．

(a) カードを並べた結果できる数の最小値を十進法で答えなさい．
(b) カードの並べ方が全部で何通りあるか求めなさい．
(c) カードを並べた結果できる数が 4 の倍数である並べ方は何通りあるか求めなさい．
(d) カードを 2 回並べる．1 回目にカードを並べた結果できる数と 2 回目にカードを並べた結果できる数の積が 4 の倍数である並べ方は何通りあるか求めなさい．

(21 岩手県大 ソフト情 2(1))

【答】
(a) 15
(b) 70 通り
(c) 15 通り
(d) 2275 通り

【解答】
(a) カードを並べた結果できる数の最小値は二進法で $1111_{(2)}$ である．これを十進法で表すと

$$1111_{(2)} = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1 = 8 + 4 + 2 + 1 = \mathbf{15} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．
(b) 4 つの 0 と 4 つの 1 が書かれたカード 8 枚を横一列に並べるから，その並べ方は

$$\frac{8!}{4!4!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \mathbf{70} \quad \textbf{(通り)} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

ある．
(c) 二進法で表された数が 4 の倍数であるための条件は下二桁が 00 であることである．よって，残り 6 つの位に 2 つの 0 と 4 つの 1 が書かれたカード横一列に並べるから，その並べ方は

$$\frac{6!}{2!4!} = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} = \mathbf{15} \quad \textbf{(通り)} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

ある．
(d) 2 つの数の積が 4 の倍数とならないものを数える．それは

- 1 回目も 2 回目もともに奇数
- 1 回目と 2 回目のいずれかが奇数で，他方が 4 の倍数ではない偶数

の 2 つの場合がある．
1 回並べたときにできる数が奇数であるのは下一桁が 1 であるものなので

$$\frac{7!}{3!4!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35 \quad (\text{通り})$$

ある．また，4 の倍数ではない偶数であるのは下二桁が 10 であるものなので

$$\frac{6!}{3!3!} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20 \quad (\text{通り})$$

ある．したがって，2 つの数の積が 4 の倍数とならない 2 回の並べ方は

$$35\times35 + 35\times20\times2 = 35(35+40) = 2625 \quad (\text{通り})$$

ある．
よって，2 数の積が 4 の倍数である並べ方は

$$70^2 - 2625 = 4900 - 2625 = 2275 \quad (\text{通り})$$

ある．