次の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．

大小 2 個のさいころを投げ，出た目をそれぞれ a，b とする．また，2 つの関数

$$y = -\frac{1}{2}(x-a)^2 + b \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y = x + \frac{a-b}{2} \qquad \cdots\cdots ②$$

を考える．このとき，次のことがいえる．

(1) ① のグラフが原点を通る確率は

$$\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$$

である．

(2) ① のグラフと x 軸との共有点について考える．2 つの共有点の x 座標のうち，一方が正，もう一方が負となる確率は

$$\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$$

である．

(3) ① のグラフと ② のグラフとの共有点について考える．

(i) 2 つのグラフが異なる 2 つの共有点をもつ確率は

$$\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}}$$

である．

(ii) 2 つのグラフが異なる 2 つの共有点をもち，それらの x 座標のうち，一方が正，もう一方が負となる確率は

$$\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$$

である．

(iii) 2 つのグラフが異なる 2 つの共有点をもち，それらの y 座標が，ともに整数となる確率は

$$\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$$

である．

(21 神戸学院大 法・経・栄養・リハ・薬 1)

【答】

ア	イウ	エ	オ	カ	キク	ケ	コ	サ	シ
1	36	1	3	7	12	1	3	1	6

【解答】

$$y=-\frac{1}{2}(x-a)^2+b \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y=x+\frac{a-b}{2} \qquad \cdots\cdots ②$$

① の右辺を $f(x)$ とおく．

(1) ① のグラフが原点を通る条件は，$f(0)=0$ であり

$$-\frac{1}{2}a^2+b=0$$

$$\therefore\quad b=\frac{a^2}{2}$$

$1 \leqq a \leqq 6,\ 1 \leqq b \leqq 6$ の範囲でこれを満たす整数の組 $(a,\ b)$ は

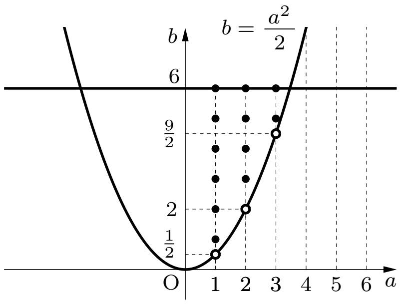
$$(a,\ b)=(2,\ 2)$$

の 1 通りである．よって，求める確率は

$$\frac{1}{6^2}=\mathbf{\frac{1}{36}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ① のグラフと x 軸が 2 つの共有点をもち，その 2 つの共有点の x 座標が正と負である条件は，$f(0)>0$ であり



$$-\frac{1}{2}a^2+b>0$$

$$\therefore\quad b>\frac{a^2}{2}$$

$1 \leqq a \leqq 6,\ 1 \leqq b \leqq 6$ の範囲でこれを満たす整数の組 $(a,\ b)$ は

$$6+4+2=12 \text{ 通り}$$

ある．よって，求める確率は

$$\frac{12}{6^2}=\mathbf{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) ① のグラフと ② のグラフの共有点の x 座標は

$$-\frac{1}{2}(x-a)^2+b=x+\frac{a-b}{2}$$

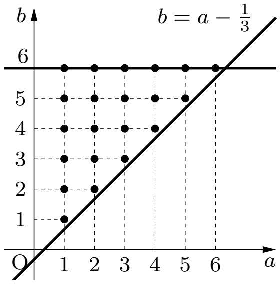
すなわち

$$x^2-2(a-1)x+a^2+a-3b=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

の実数解である．③ の左辺を $g(x)$ とおく．

(i) ① と ② のグラフが異なる 2 つの共有点をもつ条件は，(③の判別式) > 0 であり

$$(a-1)^2 - (a^2 + a - 3b) > 0$$
$$-3a + 3b + 1 > 0$$
$$\therefore \quad b > a - \frac{1}{3}$$



$1 \leqq a \leqq 6$, $1 \leqq b \leqq 6$ の範囲でこれを満たす整数の組 $(a,\ b)$ は

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 \text{ 通り}$$

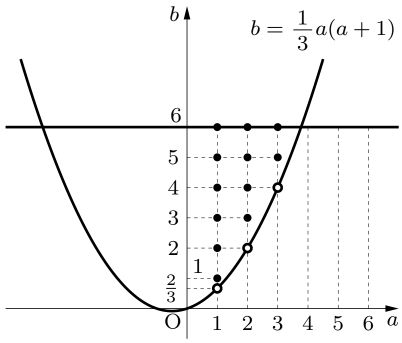
ある．求める確率は

$$\frac{21}{6^2} = \mathbf{\frac{7}{12}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) ① と ② のグラフの共有点の x 座標のうち，一方が正，もう一方が負となる条件は，$g(0) < 0$ であり

$$a^2 + a - 3b < 0$$
$$\therefore \quad b > \frac{1}{3}a(a+1)$$



$1 \leqq a \leqq 6$, $1 \leqq b \leqq 6$ の範囲でこれを満たす整数の組 $(a,\ b)$ は

$$6 + 4 + 2 = 12 \text{ 通り}$$

ある．求める確率は

$$\frac{12}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 「$g(0) < 0$」は解と係数の関係を用いて，「(③の解の積) < 0」としてもよい．

(iii) ③ の解は

$$x = a - 1 \pm \sqrt{-3a + 3b + 1}$$

であり，① と ② のグラフの共有点の y 座標は

$$y = a - 1 \pm \sqrt{-3a + 3b + 1} + \frac{a-b}{2}$$
$$= a - 1 \pm \sqrt{3(b-a) + 1} - \frac{b-a}{2}$$

である．y 座標が整数である条件は，(i) のもとで

「$b - a$ が偶数」かつ「$3(b-a) + 1$ が平方数」　$\cdots\cdots$ $(*)$

となることである．(i) の領域内の $(a,\ b)$ は

$$-\frac{1}{3} < b - a \leqq 6 - 1$$

であるから，$(*)$ を満たすのは

$$b - a = 0$$

であり，整数の組 $(a,\ b)$ は 6 通りある．求める確率は

$$\frac{6}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{6}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．