袋に白球と黒球が 5 個ずつ入っている．以下のゲームを $n$ 回続けて行う．

袋から 1 個の球を取り出す．それが白球ならば 1 点獲得する．黒球ならばさいころを投げ，出た目が 3 の倍数ならば 1 点獲得し，そうでなければ得点しない．袋から取り出した球は戻さない．

(1) $n=2$ の場合，総得点が 2 点となる確率を求めよ．
(2) $n=3$ の場合，総得点が 2 点以上となる確率を求めよ．

(21 千葉大 3)

---

【答】

(1) $\dfrac{35}{81}$

(2) $\dfrac{61}{81}$

---

【解答】

次のように事象を決める．

$W$：袋から白球を取り出し 1 点獲得するという事象
$B_1$：袋から黒球を取り出し，さいころの目が 3 の倍数となり 1 点獲得するという事象
$B_0$：袋から黒球を取り出し，さいころの目が 3 の倍数以外となり得点しないという事象

(1) $n=2$ の場合，総得点が 2 点となるのは (1 回目, 2 回目) の事象が

$$(W,\ W),\ (W,\ B_1),\ (B_1,\ W),\ (B_1,\ B_1)$$

のいずれかのときであり，求める確率は

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}+\frac{5}{10}\times\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{6}+\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{6}\times\frac{5}{9}+\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{6}\times\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{6}\\
&=\frac{2}{3^2}+\frac{5}{2\cdot 3^3}+\frac{5}{2\cdot 3^3}+\frac{2}{3^4}\\
&=\frac{36+15+15+4}{2\cdot 3^4}=\frac{70}{2\cdot 3^4}\\
&=\boldsymbol{\frac{35}{81}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(2) $n=3$ の場合，総得点が 2 点以上となるのは

(i) 2 回目までの得点が 2 点である
(ii) 2 回目までの得点が 1 点であり，3 回目に 1 点獲得する

のいずれかである．(ii) となる (1 回目, 2 回目, 3 回目) の事象とその確率は

$$(W,\ B_0,\ W \text{ または } B_1):\ \frac{5}{10}\times\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{6}\times\left(\frac{4}{8}+\frac{4}{8}\cdot\frac{2}{6}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{5\cdot 2}{3^3}\times\frac{3+1}{2\cdot 3}=\frac{10}{3^4}$$

$$(B_1,\ B_0,\ W \text{ または } B_1):\ \frac{5}{10}\cdot\frac{2}{6}\times\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{6}\times\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{6}\right)=\frac{1}{2\cdot 3}\times\frac{2^3}{3^3}\times\frac{5+1}{2^3}=\frac{1}{3^3}$$

$$(B_0,\ W,\ W \text{ または } B_1):\ \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{6}\times\frac{5}{9}\times\left(\frac{4}{8}+\frac{4}{8}\cdot\frac{2}{6}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{3^2}\times\frac{3+1}{2\cdot 3}=\frac{10}{3^4}$$

$$(B_0,\ B_1,\ W \text{ または } B_1):\ \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{6}\times\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{6}\times\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{6}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{2^2}{3^3}\times\frac{5+1}{2^3}=\frac{1}{3^3}$$

である．

求める確率は

$$\begin{aligned}
&\frac{35}{81}+\left(\frac{10}{3^4}+\frac{1}{3^3}+\frac{10}{3^4}+\frac{1}{3^3}\right)\\
&=\frac{35+(10+3+10+3)}{3^4}\\
&=\boldsymbol{\frac{61}{81}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

- (1) を用いずに余事象を考えることもできる．

  総得点が 1 点以下となる (1 回目，2 回目，3 回目) の事象とその確率は

  ($B_0$，$B_0$，$B_0$または $W$ または $B_1$)：

$$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{6}\times\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{6}\times 1=\frac{1}{3}\times\frac{2^3}{3^3}\times 1=\frac{8}{3^4}$$

  ($W$ または $B_1$，$B_0$，$B_0$)：

$$\begin{aligned}&\frac{5}{10}\times\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{6}\times\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{6}+\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{6}\times\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{6}\times\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{6}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3^3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 3}\times\frac{2^3}{3^3}\times\frac{1}{2^2}=\frac{5+1}{3^4}=\frac{2}{3^3}\end{aligned}$$

  ($B_0$，$W$ または $B_1$，$B_0$)：

$$\begin{aligned}&\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{6}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{6}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{6}\times\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{6}\times\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{6}\\&=\frac{1}{3}\times\frac{5}{3^2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2^2}{3^3}\times\frac{1}{2^2}=\frac{5+1}{3^4}=\frac{2}{3^3}\end{aligned}$$

  である．

  求める確率は

$$1-\left(\frac{8}{3^4}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^3}\right)=1-\frac{8+6+6}{3^4}=\frac{61}{81}$$

  である．