袋に白球と黒球が 5 個ずつ入っている．以下のゲームを n 回続けて行う．

袋から 1 個の球を取り出す．それが白球ならば 1 点獲得する．黒球ならばさいころを投げ，出た目が 3 の倍数ならば 1 点獲得し，そうでなければ得点しない．袋から取り出した球は戻さない．

(1) $n = 2$ の場合，総得点が 2 点となる確率を求めよ．
(2) $n = 4$ の場合，総得点が 2 点以上となる確率を求めよ．
(3) $n = 10$ の場合，総得点が 8 点以上となる確率を求めよ．

(21 千葉大 5)

【答】

(1) $\dfrac{35}{81}$

(2) $\dfrac{173}{189}$

(3) $\dfrac{17}{81}$

【解答】

次のように事象を決める．

W : 袋から白球を取り出し 1 点獲得するという事象
B_1 : 袋から黒球を取り出し，さいころの目が 3 の倍数となり 1 点獲得するという事象
B_0 : 袋から黒球を取り出し，さいころの目が 3 の倍数以外となり得点しないという事象

(1) $n = 2$ の場合，総得点が 2 点となるのは (1 回目，2 回目) の事象が

$$(W,\ W),\ (W,\ B_1),\ (B_1,\ W),\ (B_1,\ B_1)$$

のいずれかのときであり，求める確率は

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{6} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{6} \times \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{6} \times \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{6} \\
&= \frac{2}{3^2} + \frac{5}{2 \cdot 3^3} + \frac{5}{2 \cdot 3^3} + \frac{2}{3^4} \\
&= \frac{36 + 15 + 15 + 4}{2 \cdot 3^4} = \frac{70}{2 \cdot 3^4} \\
&= \boldsymbol{\frac{35}{81}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(2) 余事象の確率を考える．

総得点が 1 点以下となる (1 回目，2 回目，3 回目，4 回目) の事象とその確率は

(B_0，B_0，B_0，B_0または W または B_1) :

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{6} \times \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{6} \times \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} \times 1 = \frac{1}{3} \times \frac{2^3}{3^3} \times \frac{1}{2^2} \times 1 = \frac{2}{3^4}$$

(W または B_1，B_0，B_0，B_0) :

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{10} \times \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{6} \times \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{6} \times \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{6} \times \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{6} \times \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} \times \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{10}{3^3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} + \frac{1}{2 \cdot 3} \times \frac{2^3}{3^3} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{2^2}{3 \cdot 7} = \frac{30 + 4}{3^5 \cdot 7} = \frac{34}{3^5 \cdot 7}
\end{aligned}$$

$(B_0,\ W$ または $B_1,\ B_0,\ B_0)$：

$$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{6}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{6}\times\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{6}\times\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{6}\times\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{6}\times\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{6}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{5}{3^2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{3^3}\times\frac{1}{2^2}\times\frac{4}{3\cdot 7}=\frac{30+4}{3^5\cdot 7}=\frac{34}{3^5\cdot 7}$$

$(B_0,\ B_0,\ W$ または $B_1,\ B_0)$：

$$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{6}\times\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{6}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{6}\times\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{6}\times\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{6}\times\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{6}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{8}{3^3}\times\frac{5}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\times\frac{8}{3^3}\times\frac{1}{2^3}\times\frac{4}{3\cdot 7}=\frac{30+4}{3^5\cdot 7}=\frac{34}{3^5\cdot 7}$$

である．

求める確率は

$$1-\left(\frac{2}{3^4}+\frac{34}{3^5\cdot 7}+\frac{34}{3^5\cdot 7}+\frac{34}{3^5\cdot 7}\right)$$
$$=1-\frac{42+34+34+34}{3^5\cdot 7}=1-\frac{144}{3^5\cdot 7}=1-\frac{16}{3^3\cdot 7}$$
$$=\mathbf{\frac{173}{189}}$$ ……(答)

である．

- 【解答】ではどの回で得点するかで場合分けしたが，計算が煩雑である．余事象を得点で場合分けすると

  0 点となるのは，B_0 が 4 回，

  1 点となるのは，「W が 1 回，W_0 が 3 回」 または 「B_1 が 1 回，W_0 が 3 回」

  となるときである．余事象の確率は

$$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_1\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^3$$
$$=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 7}\cdot\frac{2^4}{3^4}+\frac{5}{3\cdot 7}\cdot\frac{2^3}{3^3}+\frac{2}{3\cdot 7}\cdot\frac{2^3}{3^4}$$
$$=\frac{8+120+16}{3^5\cdot 7}=\frac{144}{3^5\cdot 7}=\frac{16}{3^3\cdot 7}$$

  以下,【解答】と同じ．

(3) $n=10$ の場合，すべての球が取り出されるから，総得点が 8 点以上となるのは W_1 の回数に着目すると

W_1が 3 回，　W_1が 4 回，　W_1が 5 回

のいずれかのときである．求める確率は

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{6}\right)^4\left(\frac{4}{6}\right)+\left(\frac{2}{6}\right)^5$$
$$=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\frac{2^2}{3^5}+5\cdot\frac{2}{3^5}+\frac{1}{3^5}=\frac{40+10+1}{3^5}=\frac{51}{3^5}$$
$$=\mathbf{\frac{17}{81}}$$ ……(答)

である．