1 個のさいころを 3 回投げる．1 回目に出た目の数を a，2 回目に出た目の数を b，3 回目に出た目の数を c とする．また，

$$f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) $b^2 > 4c$ である確率を求めよ．
(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつ確率を求めよ．
(3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき，$f'(1) = 7$ である条件付き確率を求めよ．
(4) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき，少なくとも一つが正の解である条件付き確率を求めよ．

(21 広島大 理系 3)

【答】

(1) $\dfrac{17}{36}$

(2) $\dfrac{53}{72}$

(3) $\dfrac{6}{53}$

(4) $\dfrac{36}{53}$

【解答】

(1) 組 $(b,\ c)$ の総数は $6^2 = 36$ 通りあり，これらは同様に確からしい．

このうち，$b^2 > 4c$ を満たす組 $(b,\ c)$ は右表の○の 17 通りである．

よって，$b^2 > 4c$ である確率は

$$\boldsymbol{\frac{17}{36}} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

b^2 \ $4c$	4	8	12	16	20	24
1						
4						
9	○	○				
16	○	○	○			
25	○	○	○	○	○	○
36	○	○	○	○	○	○

(2) $f(x)$ の x^2 の係数が $(-1)^a$ であるから，a の偶奇で場合分けして考える．

(i) $a = 1,\ 3,\ 5$ のとき

$f(x) = -x^2 + bx + c$ より，$f(x) = 0$ の判別式 D は

$$D = b^2 + 4c$$

である．$b,\ c$ は，さいころの目だから，$D > 0$ となり，$f(x) = 0$ は異なる二つの実数解をもつ．このときの確率は a に着目して

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

である．

(ii) $a = 2,\ 4,\ 6$ のとき

$f(x) = x^2 + bx + c$ より，$f(x) = 0$ の判別式 D は

$$D = b^2 - 4c$$

である．このとき (1) より，$D > 0$ となる確率は組 $(b,\ c)$ に着目すると

$$\frac{17}{36}$$

であるから，組 $(a,\ b,\ c)$ に着目すると

$$\frac{1}{2} \times \frac{17}{36} = \frac{17}{72}$$

である．

(i)，(ii) は互いに排反だから，求める確率は

$$\frac{1}{2} + \frac{17}{72} = \boldsymbol{\frac{53}{72}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $E : f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつという事象

$F : f'(1) = 7$ であるという事象

とおくと，求める確率は

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

である．

(i) $a = 1,\ 3,\ 5$ のとき

$f(x) = -x^2 + bx + c$ より，$f'(x) = -2x + b$ であり，$f'(1) = 7$ となる b の値は

$$-2 + b = 7 \qquad \therefore \quad b = 9$$

これを満たすさいころの目は存在しない．

(ii) $a = 2,\ 4,\ 6$ のとき

$f(x) = x^2 + bx + c$ より，$f'(x) = 2x + b$ であり，$f'(1) = 7$ となる b の値は

$$2 + b = 7 \qquad \therefore \quad b = 5$$

(1) の表より $b^2 > 4c$ を満たす確率は組 $(b,\ c)$ に着目すると

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

であるから，組 $(a,\ b,\ c)$ に着目すると

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

である．

(i)，(ii) より

$$P_E(F) = \frac{0 + \frac{1}{12}}{\frac{53}{72}} = \boldsymbol{\frac{6}{53}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $G : f(x) = 0$ が少なくとも一つの正の解をもつという事象

とおくと，求める確率は

$$P_E(G) = \frac{P(E \cap G)}{P(E)}$$

である．

(i) $a = 1,\ 3,\ 5$ のとき

$f(x) = -x^2 + bx + c$ である．このとき $f(0) = c > 0$ であり，$f(x) = 0$ はつねに正の解を一つもち事象 $E \cap G$ の条件を満たす．このとき，$b,\ c$ は何でもよいから，確率は

$$\frac{1}{2}$$

(ii) $a = 2,\ 4,\ 6$ のとき

$f(x) = x^2 + bx + c$ である．このとき $y = f(x)$ のグラフの軸は $x = -\dfrac{b}{2} < 0$ であり，$f(0) = c > 0$ である．$f(x) = 0$ は正の解をもたない．

(ⅰ), (ii) より

$$P_E(G) = \frac{\dfrac{1}{2} + 0}{\dfrac{53}{72}} = \mathbf{\frac{36}{53}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.