$k,\ m,\ n$ は自然数とする．ある箱に，白い球が m 個，赤い球が n 個入っている．この箱から無作為に球を 1 個取り出して，球の色を確認してから元の箱に戻す試行を繰り返す．白い球が合計 k 回箱に戻された時点で終了する．このときの試行の回数が x 回 $(x \geqq k)$ である確率を $p_k(x)$ とする．

(1) $p_k(k)$ と $p_k(k+1)$ を $k,\ m,\ n$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{p_k(x+1)}{p_k(x)}$ を $k,\ m,\ n,\ x$ を用いて表せ．

(3) $m=3,\ n=7$ であるとき，$p_2(x)$ の最大値を求めよ．

(21 札幌医大 3)

【答】

(1) $p_k(k)=\left(\dfrac{m}{m+n}\right)^k$，$p_k(k+1)=k\left(\dfrac{m}{m+n}\right)^k\left(\dfrac{n}{m+n}\right)$

(2) $\dfrac{p_k(x+1)}{p_k(x)}=\dfrac{x}{x+1-k}\cdot\dfrac{n}{m+n}$

(3) $\dfrac{1323}{10000}$

【解答】

1 回の試行で白い球が箱に戻される確率は $\dfrac{m}{m+n}$，赤い球が箱に戻される確率は $\dfrac{n}{m+n}$ である．

(1) $p_k(k)$ は試行の回数が k で k 回白い球が箱に戻される確率であるから

$$\boldsymbol{p_k(k)=\left(\frac{m}{m+n}\right)^k} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

$p_k(k+1)$ は k 回目までの試行で $k-1$ 回白い球，1 回赤い球を箱に戻し，$k+1$ 回目に白い球を箱に戻す確率であるから

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p_k(k+1)}&={}_k\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}\left(\frac{n}{m+n}\right)\times\frac{m}{m+n}\\&=\boldsymbol{k\left(\frac{m}{m+n}\right)^k\left(\frac{n}{m+n}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(2) $p_k(x)$ は $x-1$ 回目までの試行で $k-1$ 回白い球，$x-k$ 回赤い球を箱に戻し，x 回目に白い球を箱に戻す確率であるから

$$\begin{aligned}p_k(x)&={}_{x-1}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}\left(\frac{n}{m+n}\right)^{x-k}\times\frac{m}{m+n}\\&=\frac{(x-1)!}{(k-1)!(x-k)!}\left(\frac{m}{m+n}\right)^k\left(\frac{n}{m+n}\right)^{x-k}\end{aligned}$$

である．同じく

$$p_k(x+1)=\frac{x!}{(k-1)!(x+1-k)!}\left(\frac{m}{m+n}\right)^k\left(\frac{n}{m+n}\right)^{x+1-k}$$

であり

$$\boldsymbol{\frac{p_k(x+1)}{p_k(x)}=\frac{x}{x+1-k}\cdot\frac{n}{m+n}} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) ① において，$m=3,\ n=7,\ k=2$ とすると

$$\frac{p_2(x+1)}{p_2(x)}=\frac{x}{x-1}\cdot\frac{7}{10}\quad(x\geqq 2)$$

である．$p_2(x)$ の増減を調べる．

$$\begin{aligned}p_2(x)<p_2(x+1)&\iff\frac{p_2(x+1)}{p_2(x)}>1\quad(\because\ p_2(x)>0)\\&\iff\frac{x}{x-1}\cdot\frac{7}{10}>1\\&\iff 7x>10(x-1)\\&\iff x<\frac{10}{3}=3.3\cdots\\&\qquad\therefore\quad x=2,\ 3\end{aligned}$$

同じく

$$\begin{aligned}p_2(x)>p_2(x+1)&\iff x>\frac{10}{3}=3.3\cdots\\&\qquad\therefore\quad x=4,\ 5,\ \cdots\end{aligned}$$

であり

$$p_2(2)<p_2(3)<p_2(4),\ p_2(4)>p_2(5)>p_2(6)>\cdots$$

よって，$p_2(x)$ は $x=4$ のとき

$$\text{最大値}\quad p_2(4)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^2=\frac{3^3\cdot 7^2}{10^4}=\boldsymbol{\frac{1323}{10000}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．