関数 $y = 3^{x-3} + 16 \cdot 3^{7-x}$ は，$x = \boxed{6} + \boxed{7} \log_3 2$ のとき，最小値 $y = \boxed{8}\boxed{9}$ をとる．

(21 関東学院大 理系文系 1(2))

【答】

6	7	89
5	2	72

【解答】

関数を変形すると

$$\begin{aligned} y &= 3^{x-3} + 16 \cdot 3^{7-x} \\ &= \frac{3^x}{3^3} + \frac{2^4 \cdot 3^7}{3^x} \\ &\geqq 2\sqrt{\frac{3^x}{3^3} \cdot \frac{2^4 \cdot 3^7}{3^x}} \quad (\because \text{相加平均・相乗平均の関係}) \\ &= 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \\ &= 72 \end{aligned}$$

等号成立は

$$\frac{3^x}{3^3} = \frac{2^4 \cdot 3^7}{3^x} \qquad \therefore \quad 3^x = 2^2 \cdot 3^5$$

$$\therefore \quad x = \log_3(2^2 \cdot 3^5) = 5 + 2\log_3 2$$

のときである．

よって，関数 y は

$x = \mathbf{5 + 2\log_3 2}$ のとき，最小値 $y = \mathbf{72}$ ……(答)

をとる．