対数関数の最大値

正の実数 $x,\ y$ が，方程式

$$\frac{9^{4x}+9^{y^2+1}}{6}=3^{4x+y^2} \qquad \cdots\cdots (\star)$$

を満たすとする．

(1) y^2 を x を用いて表せ．

(2) 正の実数 $x,\ y$ が $(\star)$ および $1-\dfrac{x}{y}>0$ を満たしながら動くとき，

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$$

の最大値を求めよ．

(21 北海道大 理 3)

【答】

(1) $y^2=4x-1$

(2) $\log_4\dfrac{3}{4}$

【解答】

$$x>0 \text{ かつ } y>0$$

$$\frac{9^{4x}+9^{y^2+1}}{6}=3^{4x+y^2} \qquad \cdots\cdots (\star)$$

(1) $X=3^{4x},\ Y=3^{y^2}$ とおくと

$$(\star) \iff X^2+9Y^2=6XY$$

$$(3Y-X)^2=0 \qquad \therefore \quad 3Y=X$$

よって

$$3\cdot 3^{y^2}=3^{4x} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y^2=4x-1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

と表される．

- $$(\star) \iff \frac{9^{4x}+9^{y^2+1}}{2}=3\cdot 3^{4x+y^2}$$

$$\iff \frac{(3^{4x})^2+(3^{y^2+1})^2}{2}=3^{4x+y^2+1}$$

左辺に対し，相加平均・相乗平均の関係を用いると

$$\frac{(3^{4x})^2+(3^{y^2+1})^2}{2}\geqq\sqrt{(3^{4x})^2\cdot(3^{y^2+1})^2}=3^{4x+y^2+1} \ (=(\star)\text{ の右辺})$$

相加平均・相乗平均の関係における等号成立条件により

$$9^{4x}=9^{y^2+1} \qquad \therefore \quad 4x=y^2+1 \qquad \therefore \quad y^2=4x-1$$

(2) 正の実数 $x,\ y$ が $(\star)$ および $1-\dfrac{x}{y}>0$ を満たすという条件を整理すると

$$\begin{cases} x>0 \text{ かつ } y>0 \\ y^2=4x-1 \quad (\because\ (1)) \\ \dfrac{y-x}{y}>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{y^2+1}{4} (>0 \text{ を満たす}) \\ y>0 \\ x<y \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{y^2+1}{4} \\ y^2+1<4y \end{cases}$$

であり

$$\begin{cases} x=\dfrac{y^2+1}{4} \\ 2-\sqrt{3}<y<2+\sqrt{3} \end{cases} \qquad \cdots\cdots (*)$$

とまとめられる．このとき

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}} 4}+\frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}} 4} \\ &=\log_4\left(1+\frac{x}{y}\right)+\log_4\left(1-\frac{x}{y}\right) \quad (\because \text{ 底の変換公式}) \\ &=\log_4\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right) \\ &=\log_4\left\{1-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{(y^4+2y^2+1)}{16}\right\} \quad \left(\because\ x=\frac{y^2+1}{2}\right) \\ &=\log_4\left\{\frac{7}{8}-\frac{1}{16}\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)\right\} \\ &\leqq \log_4\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{16}\cdot 2\sqrt{y^2\cdot\frac{1}{y^2}}\right) \quad (\because \text{ 相加平均・相乗平均の関係}) \\ &=\log_4\frac{3}{4} \end{aligned}$$

である．等号は $y=1\ (>0)$ のとき成立する．これは $(*)$ を満たす．

よって，求める最大値は $\mathbf{\log_4\dfrac{3}{4}}$ である． ……(答)