

実数 x, y は, $x \geq \frac{1}{10}$, $y \geq \frac{1}{10}$, $x^2y = 10$ を満たす.

- (1) $\log_{10} x$ および $\log_{10} y$ のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ.
 (2) $-4(\log_{10} x)(\log_{10} y) + 3(\log_{10} x)^3$ の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの x, y の値を求めよ.

(21 岐阜薬大 1)

【答】

- (1) $-1 \leq \log_{10} x \leq 1$, $-1 \leq \log_{10} y \leq 3$
 (2) 最大値 9 ($x = \frac{1}{10}$, $y = 1000$), 最小値 $-\frac{112}{243}$ ($x = 10^{\frac{2}{9}}$, $y = 10^{\frac{5}{9}}$)

【解答】

- (1) 与えられた条件より

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{10} \\ y \geq \frac{1}{10} \\ x^2y = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} \log_{10} x \geq \log_{10} \frac{1}{10} \\ \log_{10} y \geq \log_{10} \frac{1}{10} \\ \log_{10} x^2y = \log_{10} 10 \end{cases} \iff \begin{cases} \log_{10} x \geq -1 \\ \log_{10} y \geq -1 \\ 2\log_{10} x + \log_{10} y = 1 \end{cases}$$

が成り立つ. $\log_{10} x = X, \log_{10} y = Y$ おくと

$$(*) \begin{cases} X \geq -1 \\ Y \geq -1 \\ 2X + Y = 1 \end{cases}$$

であり, これを XY 平面に図示すると, 右図の太線部分となる.

$$-1 \leq X \leq 1, \quad -1 \leq Y \leq 3$$

であるから, $\log_{10} x$ および $\log_{10} y$ のとりうる値の範囲は

$$-1 \leq \log_{10} x \leq 1, \quad -1 \leq \log_{10} y \leq 3$$

である.

- (2) $Z = -4(\log_{10} x)(\log_{10} y) + 3(\log_{10} x)^3$ とおき, Z を X, Y で表すと

$$Z = -4XY + 3X^3$$

であり

$$(*) \iff \begin{cases} X \geq -1 \\ Y = -2X + 1 \\ -2X + 1 \geq -1 \end{cases} \iff \begin{cases} Y = -2X + 1 \\ -1 \leq X \leq 1 \end{cases}$$

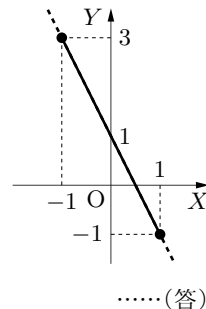
であるから

$$\begin{aligned} Z &= -4X(-2X + 1) + 3X^3 \\ &= 3X^3 + 8X^2 - 4X \quad (-1 \leq X \leq 1) \end{aligned}$$

となり, Z は X の関数として表すことができる.

$$Z(X) = 3X^3 + 8X^2 - 4X$$

として, X で微分すると



……(答)

$$\begin{aligned} Z'(X) &= 9X^2 + 16X - 4 \\ &= 9(X+2)\left(X - \frac{2}{9}\right) \end{aligned}$$

であるから、 $-1 \leq X \leq 1$ における $Z(X)$ の増減は、右のようになる。

X	-1	\cdots	$\frac{2}{9}$	\cdots	1
$Z'(X)$		$-$	0	$+$	
$Z(X)$		\searrow		\nearrow	

$$Z(-1) = 9, \quad Z(1) = 7, \quad Z\left(\frac{2}{9}\right) = -\frac{112}{243}$$

であり、 $Y = -2X + 1$ にも注意すると

$X = -1$ のときは、 $Y = 3$ であり

$$\begin{cases} \log_{10} x = -1 \\ \log_{10} y = 3 \end{cases} \quad \therefore \quad x = \frac{1}{10}, \quad y = 1000$$

$X = \frac{2}{9}$ のときは、 $Y = \frac{5}{9}$ であり

$$\begin{cases} \log_{10} x = \frac{2}{9} \\ \log_{10} y = \frac{5}{9} \end{cases} \quad \therefore \quad x = 10^{\frac{2}{9}}, \quad y = 10^{\frac{5}{9}}$$

である。以上より

$$x = \frac{1}{10}, \quad y = 1000 \text{ のとき, 最大値 } 9, \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$x = 10^{\frac{2}{9}}, \quad y = 10^{\frac{5}{9}} \text{ のとき, 最小値 } -\frac{112}{243} \quad \dots\dots(\text{答})$$

をとる。