第 4 項が 30 である数列 $\{a_n\}$ の一般項を $a_n = \sqrt{\dfrac{m}{n}}$ で定義する．また，$b = \log_2 3$，$c = \log_2 5$ とする．ただし，m は自然数である．次の問いに答えなさい．

(1) m，a_1，a_2 の値をそれぞれ求めなさい．

(2) $\log_2 a_1$，$\log_2 a_2$ をそれぞれ b と c の式で表しなさい．

(3) 不等式 $\log_2 k_1 < b < \log_2(k_1 + 2)$ を満たす自然数 k_1 を求めなさい．

(4) 不等式 $2(\log_2 a_1 - \log_2 a_2) + b < k_2$ を満たす最小の自然数 k_2 を求めなさい．

(21 帯広畜産大 2)

【答】

(1) $m = 3600,\ a_1 = 60,\ a_2 = 30\sqrt{2}$

(2) $\log_2 a_1 = 2 + b + c$，$\log_2 a_2 = \dfrac{3}{2} + b + c$

(3) $k_1 = 2$

(4) $k_2 = 3$

【解答】

(1) $a_4 = 30$ であるから

$$\sqrt{\frac{m}{4}} = 30 \qquad \therefore \quad m = 4 \cdot 30^2 = \mathbf{3600} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．したがって

$$a_1 = \sqrt{\frac{3600}{1}} = \mathbf{60} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{3600}{2}} = \sqrt{1800} = \boldsymbol{30\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) の結果と $b = \log_2 3$, $c = \log_2 5$ より

$$\log_2 a_1 = \log_2 60 = \log_2(2^2 \cdot 3 \cdot 5) = \boldsymbol{2 + b + c} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\log_2 a_2 = \log_2 30\sqrt{2} = \log_2(2^{\frac{3}{2}} \cdot 3 \cdot 5) = \boldsymbol{\frac{3}{2} + b + c} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 与えられた不等式は

$$\log_2 k_1 < \log_2 3 < \log_2(k_1 + 2)$$

$$\therefore \quad k_1 < 3 < k_1 + 2$$

$$\therefore \quad 1 < k_1 < 3$$

k_1 は自然数であるから

$$\boldsymbol{k_1 = 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) (2) の結果より

$$\begin{aligned} 2(\log_2 a_1 - \log_2 a_2) + b &= 2\left\{(2 + b + c) - \left(\frac{3}{2} + b + c\right)\right\} + b \\ &= 1 + b \\ &= \log_2 2 + \log_2 3 \\ &= \log_2 6 \end{aligned}$$

であり，与えられた不等式は

$$\log_2 6 < k_2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$2^2 < 6 < 2^3$ であるから $2 < \log_2 6 < 3$ である．① を満たす最小の自然数 k_2 は

$$\boldsymbol{k_2 = 3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．