$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．0.45^{33} は小数第何位に初めて 0 以外の数字が現れるか．また，その数字は何か答えよ．

(21 福井工大)

【答】 小数第 12 位に初めて 0 以外の数字 3 が現れる

【解答】

0.45^{33} は小数第 n 位に初めて 0 以外の数字 a が現れるということは，自然数 n，a は

$$a \times 10^{-n} \leqq 0.45^{33} < (a+1) \times 10^{-n}$$

を満たすということである．

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ より

$$\begin{aligned}
\log_{10} 0.45^{33} &= 33 \log_{10} \frac{45}{100} = 33 \log_{10} \frac{3^2}{2 \cdot 10} \\
&= 33\{2 \log_{10} 3 - (\log_{10} 2 + 1)\} \\
&= 33\{2 \times 0.4771 - (0.3010 + 1)\} \\
&= 33 \times (-0.3468) \\
&= -11.4444 \\
&= -12 + 0.5556
\end{aligned}$$

$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020$ なので

$$\log_{10} 3 < 0.5556 < \log_{10} 4$$

であり

$$\begin{aligned}
&-12 + \log_{10} 3 < \log_{10} 0.45^{33} < -12 + \log_{10} 4 \\
\therefore\quad &3 \times 10^{-12} < 0.45^{33} < 4 \times 10^{-12}
\end{aligned}$$

である．すなわち，0.45^{33} は

小数第 12 位に初めて 0 以外の数字 3 が現れる． ……(答)