$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 20^{21} の桁数を求めよ．

(2) 20^{21} の最高位の数字を求めよ．

(3) $5^n > 20^{21}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

(21 鳥取大 農・地域 7)

【答】

(1) 28
(2) 2
(3) 40

【解答】

(1) 20^{21} が n 桁であるとすると，n は

$$10^{n-1} \leqq 20^{21} < 10^n$$

すなわち

$$n - 1 \leqq \log 20^{21} < n$$

を満たす．

$$\log_{10} 20^{21} = 21(\log_{10} 2 + \log_{10} 10) = 21(0.3010 + 1) = 27.321$$

であるから

$$27 \leqq \log_{10} 20^{21} < 28$$

であり，20^{21} は **28 桁** である． ……(答)

(2) 28 桁の数 20^{21} の最高位の数字を a とすると，a は

$$a \times 10^{27} \leqq 20^{21} < (a+1) \times 10^{27}$$

すなわち

$$27 + \log_{10} a \leqq 27.321 < 27 + \log_{10}(a+1)$$
$$\therefore \quad \log_{10} a \leqq 0.321 < \log_{10}(a+1)$$

を満たす．$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ より

$$\log_{10} 2 \leqq 0.321 < \log_{10} 3$$

であり，20^{21} の最高位の数字は **2** である． ……(答)

(3) $5^n > 20^{21}$ の両辺の常用対数をとると

$$n \log_{10} 5 > 27.321$$
$$n(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) > 27.321$$
$$n(1 - 0.3010) > 27.321$$
$$0.699n > 27.321$$
$$\therefore \quad n > \frac{27.321}{0.699} = 39.08\cdots$$

よって，$5^n > 20^{21}$ を満たす最小の自然数 n は **40** である． ……(答)