

## 数 学

### 《解答にさいしての注意》

1. 工学部4学科の受験者は、この問題を選択することはできない。
2. **1** は必須問題である。全員が解答すること。
3. **2～6** は選択問題である。2つを選んで解答し、選択した問題番号は解答用紙に明示すること。
4. 解答用紙には、答えだけでなく途中の計算も書くこと。

### (必須問題)

**1** 次の問いに答えよ。

- (i) 関数  $y = ax + b$  ( $-2 \leq x \leq 5$ ) の値域が  $1 \leq y \leq 12$  であるとき、定数  $a$ ,  $b$  の値を求めよ。
- (ii)  $a^3 - 2a^2b - ab^2 + 2b^3$  を因数分解せよ。
- (iii) 循環小数  $0.\dot{0}95\dot{7}$  を既約分数で表せ。
- (iv)  $AB = 7$ ,  $AC = 5$ ,  $\angle BAC = 135^\circ$  である三角形  $ABC$  について、 $\angle BAC$  の二等分線と  $BC$  の交点を  $M$  とするとき、三角形  $ABM$  の面積を求めよ。

### (選択問題)

**2** 実数  $x$ ,  $y$  が  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x + y = 2$  をみたすとき、次の問いに答えよ。

- (i)  $xy$  の最大値と最小値およびそのときの  $x$ ,  $y$  の値を求めよ。
- (ii)  $t = xy$  とおくと、 $x^2y^2 + x^2 + 3xy + y^2$  を  $t$  の式で表せ。
- (iii)  $x^2y^2 + x^2 + 3xy + y^2$  の最大値と最小値およびそのときの  $x$ ,  $y$  の値を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

(i) 0以上の実数  $a, b, c$  が  $a + b \geq c$  をみたすとき、

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ。

(ii) (i)で示した不等式について、等号が成り立つための条件を求めよ。

(iii) 0以上の実数  $a, b, c$  が

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq \frac{c}{1+c}$$

をみたすとき、 $a + b \geq c$  は成り立つか。成り立つならば証明し、成り立たないならば反例をあげよ。

4 関数  $F(x) = \int_1^x (t^2 + t - 2) dt$  について、次の問いに答えよ。

(i) 関数  $F(x)$  の極値を求めよ。

(ii) 方程式  $F(x) = F(0)$  の解を求めよ。

5 自然数  $n$  に対して、 $a_k = \frac{{}^n C_k}{k+1}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) とおくとき、次の問いに答えよ。ただし、 ${}^n C_k$  は異なる  $n$  個の中から異なる  $k$  個を取る組合せの総数を表す。

(i)  $n = 3, 4, 5$  のとき、 $a_k$  が最大となる  $k$  の値をそれぞれ求めよ。

(ii) 自然数  $n$  に対して、 $a_k$  が最大となる  $k$  を  $n$  の式で表せ。

6 2以上の整数  $n$  に対して、等式

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{3n^2 - n - 2}{4n^2 + 4n}$$

が成り立つことを示せ。