数　　学

《解答にさいしての注意》
1. 工学部4学科の受験者は，この問題を選択することはできない。
2. **1** は必須問題である。全員が解答すること。
3. **2** ～ **6** は選択問題である。2つを選んで解答し，選択した問題番号は解答用紙に明示すること。
4. 解答用紙には，答えだけでなく途中の計算も書くこと。

(必須問題)

1 次の問いに答えよ。

(i) 関数 $y = x^2 + px + q\ (2 \leqq x < 5)$ の値域が $3 \leqq y \leqq 10$ であるとき，定数 p，q の値を求めよ。

(ii) 不等式 $2x - 6 < y < -x + 4$ をみたす正の整数 x，y の組をすべて求めよ。

(iii) 集合 X の部分集合 A，B に関する以下の条件のうち，$A \subset B$ と同値であるものをすべてあげよ。ただし，$\overline{A}$ は集合 A の補集合，$\varnothing$ は空集合を表す。

(a) $A \in B$　(b) $\{A\} \in B$　(c) $\overline{A} \subset \overline{B}$　(d) $\overline{A} \supset \overline{B}$

(e) $A \cup B = A$　(f) $A \cup B = B$　(g) $A \cap \overline{B} = \varnothing$　(h) $\overline{A} \cap B = \varnothing$

(iv) $\mathrm{BC} = 5$，$\cos \angle \mathrm{ABC} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos \angle \mathrm{ACB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である三角形 ABC の面積 S を求めよ。

(選択問題)

2 次の問いに答えよ。

(i) 2次方程式 $8x^2 + 2(a-6)x + 4 - a = 0$ が異なる2つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(ii) 方程式 $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$ の解を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(iii) 方程式 $8\sin^2\theta + 2(a-6)\sin\theta + 4 - a = 0$ が $0° \leqq \theta \leqq 180°$ において異なる4つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

3 正の実数 x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 が $x_1 < x_2 < x_3$ と

$$(\log_2 x_2 - \log_2 x_1)(\log_2 y_3 - \log_2 y_1) = (\log_2 x_3 - \log_2 x_1)(\log_2 y_2 - \log_2 y_1)$$

をみたすとき,

$$y_1 = ax_1^b, \qquad y_2 = ax_2^b, \qquad y_3 = ax_3^b$$

となるような定数 a, b が存在することを示せ。

4 多項式 $f(x)$ が

$$xf'(x) + \int_1^x f(t)\,dt = 2x^2 + x + 1$$

をみたすとき, 次の問いに答えよ。

(i) 多項式 $f(x)$ の次数を求めよ。

(ii) 多項式 $f(x)$ を求めよ。

5 次の問いに答えよ。

(i) n を奇数とするとき, $n^2 - 1$ は 8 の倍数であることを示せ。

(ii) m, n を奇数とするとき,

$$\frac{(mn)^2 - 1}{8} - \frac{m^2 - 1}{8} - \frac{n^2 - 1}{8}$$

は 8 の倍数であることを示せ。

(iii) m, n を奇数とするとき,

$$\frac{(mn)^2 - 1}{8} + \frac{m^2 - 1}{8} + \frac{n^2 - 1}{8}$$

は偶数であることを示せ。

6 平面上の 3 点 O, A, B は $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1$ をみたすとする。また t を実数とし, 点 C を $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1 - t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ により定める。このとき, 次の問いに答えよ。

(i) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ を $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ と t を用いて表せ。

(ii) $\left| |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - 1 \right| = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ を示せ。