

数 学

《解答にさいしての注意》

1. 工学部4学科の受験者は、この問題を選択することはできない。
2. **1** は必須問題である。全員が解答すること。
3. **2～6** は選択問題である。2つを選んで解答し、選択した問題番号は解答用紙に明示すること。
4. 解答用紙には、答えだけでなく途中の計算も書くこと。

(必須問題)

1 次の問いに答えよ。

- (i) 2次関数 $f(x) = -x^2 + px + q$ は $f(5) = f(8)$ をみたし、 $f(x)$ の最大値は21であるとす。このとき、定数 p 、 q の値を求めよ。
- (ii) 不等式 $|x + 2| - |x - 3| < 4$ を解け。
- (iii) $\frac{3}{5 - \sqrt{23}}$ の整数部分を求めよ。
- (iv) 円に内接する四角形 ABCD が $\angle ABC = 150^\circ$ 、 $AB = 4$ 、 $BC = 2\sqrt{3}$ 、 $DA = 5$ をみたすとき、CD の長さを求めよ。

(選択問題)

2 次の問いに答えよ。ただし、 $\sqrt{3}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

- (i) a 、 b 、 c 、 d を有理数とする。 $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$ のとき、 $a = c$ 、 $b = d$ を示せ。
- (ii) a 、 b 、 c を整数とする。2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が $p + q\sqrt{3}$ (p 、 q は有理数) を解にもつとき、 $p - q\sqrt{3}$ もこの方程式の解であることを示せ。

3 三角形 ABC において、頂点 A, B, C に向かい合う辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c で表し、 $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさをそれぞれ A, B, C で表すとき、次の問いに答えよ。

(i) 等式

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

が成り立つことを示せ。

(ii) 不等式

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

が成り立つことを示せ。

4 不等式

$$2(\log_{\sqrt{3}} x)^2 - 40 \log_9 \sqrt{x} - 3 > 0 \cdots \cdots (1)$$

について、次の問いに答えよ。

(i) $t = \log_3 x$ とおくと、不等式 (1) を t の式で表せ。

(ii) 不等式 (1) をみたす最小の自然数 x を求めよ。

5 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正六角形 ABCDEF について、次の問いに答えよ。

(i) 7 個の点 O, A, B, C, D, E, F から 3 点を選んで三角形を作るとき、三角形は全部で何個できるか。

(ii) (i) で作ったすべての三角形の面積の平均値を求めよ。

6 実数 x を超えない最大の整数を $[x]$ と表すことにする。自然数 n に対して数列 $\{a_n\}$ を $a_n = [\sqrt{n}]$ で定めるとき、次の問いに答えよ。

(i) 自然数 m に対して $a_n = m$ となる n の個数を m を用いて表せ。

(ii) $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{99}$ の値を求めよ。