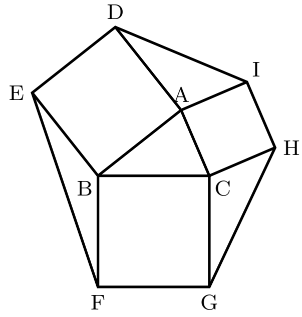
右の図のように，$\triangle$ABC の外側に辺 AB，BC，CA をそれぞれ 1 辺とする正方形 ADEB，BFGC，CHIA をかき，2 点 E と F，G と H，I と D をそれぞれ線分で結んだ図形を考える．以下において

$\mathrm{BC} = a, \quad \mathrm{CA} = b, \quad \mathrm{AB} = c$

$\angle\mathrm{CAB} = A, \quad \angle\mathrm{ABC} = B, \quad \angle\mathrm{BCA} = C$

とする．



参考図

(1) $b = 6$，$c = 5$，$\cos A = \dfrac{3}{5}$ のとき，

$\sin A = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{ウエ}}$, $\triangle$AID の面積は $\boxed{\text{オカ}}$ である．

また，正方形 BFGC の面積は $\boxed{\text{キク}}$ である．

(2) 正方形 BFGC，CHIA，ADEB の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とする．このとき，$S_1 - S_2 - S_3$ は

- $0° < A < 90°$ のとき，$\boxed{\text{ケ}}$.
- $A = 90°$ のとき，$\boxed{\text{コ}}$.
- $90° < A < 180°$ のとき，$\boxed{\text{サ}}$.

$\boxed{\text{ケ}}$～$\boxed{\text{サ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい．）

⓪ 0 である
① 正の値である
② 負の値である
③ 正の値も負の値もとる

(3) $\triangle$AID，$\triangle$BEF，$\triangle$CGH の面積をそれぞれ T_1, T_2, T_3 とする．このとき，$\boxed{\text{シ}}$ である．

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ $a < b < c$ ならば，$T_1 > T_2 > T_3$
① $a < b < c$ ならば，$T_1 < T_2 < T_3$
② A が鈍角ならば,$T_1 < T_2$ かつ $T_1 < T_3$
③ a, b, c の値に関係なく，$T_1 = T_2 = T_3$

(4) どのような △ABC に対しても，六角形 DEFGHI の面積は b, c, A を用いて

$$2\left\{b^2+c^2+bc\left(\boxed{\text{ス}}\right)\right\}$$

と表せる．

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ $\sin A+\cos A$	① $\sin A-\cos A$	② $2\sin A-\cos A$
③ $2\sin A+\cos A$	④ $\sin A+2\cos A$	⑤ $\sin A-2\cos A$

(5) △ABC，△AID，△BEF，△CGH のうち，外接円の半径が**最も小さい**ものを求める．

$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき，ID $\boxed{\text{セ}}$ BC であり

（△AID の外接円の半径）$\boxed{\text{ソ}}$（△ABC の外接円の半径）

であるから，外接円の半径が最も小さい三角形は

- $0^\circ < A < B < C < 90^\circ$ のとき，$\boxed{\text{タ}}$ である．
- $0^\circ < A < B < 90^\circ < C$ のとき，$\boxed{\text{チ}}$ である．

$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい．）

⓪ $<$	① $=$	② $>$

$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい．）

⓪ △ABC	① △AID	② △BEF	③ △CGH

(6) △ABC，△AID，△BEF，△CGH のうち，内接円の半径が**最も大きい**三角形は

- $0^\circ < A < B < C < 90^\circ$ のとき，$\boxed{\text{ツ}}$ である．
- $0^\circ < A < B < 90^\circ < C$ のとき，$\boxed{\text{テ}}$ である．

$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{テ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい．）

⓪ △ABC	① △AID	② △BEF	③ △CGH

(21 共通テスト I 2)

【答】

ア	イ	ウエ	オカ	キク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ
4	5	12	12	25	2	0	1	3	1	2	2	0	3	0	3

【解答】

(1) $0^\circ < A < 180^\circ$ であるから，$\cos A = \dfrac{3}{5}$ のとき

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{\boxed{\mathbf{4}}}{\boxed{\mathbf{5}}} \qquad \cdots\cdots (\text{ア，イの答})$$

であり，さらに，$b=6$，$c=5$ であるから

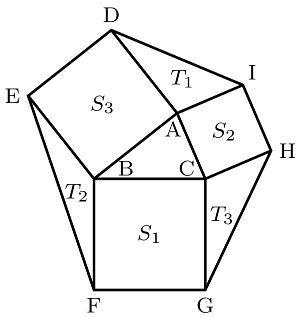
$$(\triangle\text{ABC の面積}) = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{4}{5} = \boxed{\mathbf{12}} \qquad \cdots\cdots (\text{ウエの答})$$

$$\begin{aligned}(\triangle\text{AID の面積}) &= \frac{1}{2}bc\sin(360^\circ-(90^\circ+A+90^\circ)) \\ &= \frac{1}{2}bc\sin(180^\circ-A) \\ &= \frac{1}{2}bc\sin A = \boxed{\mathbf{12}} \qquad \cdots\cdots (\text{オカの答})\end{aligned}$$

である．また

$$\begin{aligned}(\text{正方形 BFGC の面積}) &= a^2 \\ &= b^2+c^2-2bc\cos A \quad (\because\ \text{余弦定理}) \\ &= 36+25-2\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{3}{5} \\ &= \boxed{\mathbf{25}} \qquad \cdots\cdots (\text{キクの答})\end{aligned}$$

である．



(2) 正方形 BFGC，CHIA，ADEB の辺の長さはそれぞれ a，b，c であるから

$$\begin{aligned}&S_1-S_2-S_3 \\ &= a^2-b^2-c^2 \\ &= (b^2+c^2-2bc\cos A)-b^2-c^2 \quad (\because\ \text{余弦定理}) \\ &= -2bc\cos A\end{aligned}$$

であり，$S_1-S_2-S_3$ は

- $0^\circ < A < 90^\circ$ のとき，$\cos A > 0$ であるから，負の値である． $\boxed{\mathbf{2}}$ $\cdots\cdots$ (ケの答)
- $A = 90^\circ$ のとき，$\cos A = 0$ であるから，0 である． $\boxed{\mathbf{0}}$ $\cdots\cdots$ (コの答)
- $90^\circ < A < 180^\circ$ のとき，$\cos A < 0$ であるから，正の値である． $\boxed{\mathbf{1}}$ $\cdots\cdots$ (サの答)

(3) $\angle\text{IAD} = 180^\circ - A$，$\angle\text{EBF} = 180^\circ - B$，$\angle\text{GCH} = 180^\circ - C$ であるから，$\triangle$ABC の面積を T とすると

$$T_1 = \frac{1}{2}bc\sin(180^\circ-A) = \frac{1}{2}bc\sin A = T$$

$$T_2 = \frac{1}{2}ca\sin(180^\circ-B) = \frac{1}{2}ca\sin B = T$$

$$T_1 = \frac{1}{2}ab\sin(180^\circ-C) = \frac{1}{2}ab\sin C = T$$

であり，a，b，c の値に関係なく，$T_1 = T_2 = T_3$ である． $\boxed{\mathbf{3}}$ $\cdots\cdots$ (シの答)

(4) (3) より，$T_1 = T_2 = T_3 = T$ であるから

$$\begin{aligned}
&(\text{六角形 DEFGHI の面積}) \\
&= T + S_1 + S_2 + S_3 + T_1 + T_2 + T_3 \\
&= 4T + a^2 + b^2 + c^2 \\
&= 4 \times \frac{1}{2} bc \sin A + (b^2 + c^2 - 2bc \cos A) + b^2 + c^2 \quad (\because \text{ 余弦定理}) \\
&= 2bc \sin A + 2(b^2 + c^2 - bc \cos A) \\
&= 2\{b^2 + c^2 + bc(\sin A - \cos A)\} \quad \boxed{\mathbf{1}}
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ (スの答)

と表せる．

(5) 余弦定理を用いると

$$\mathrm{ID}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180^\circ - A) = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

$$\mathrm{BC}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

であり，$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき，$\cos A > 0$ であるから

$$\mathrm{ID}^2 > \mathrm{BC}^2 \qquad \therefore \quad \mathrm{ID} > \mathrm{BC} \quad \boxed{\mathbf{2}}$$

$\cdots\cdots$ (セの答)

である．

$\mathrm{AI} = \mathrm{AC}(= b)$, $\mathrm{AD} = \mathrm{AB}(= c)$ であるから，ID と BC の大小は $\angle\mathrm{IAD}$ と A の大小により決まる．$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき

$$\angle\mathrm{IAD} = 180^\circ - A > 90^\circ > A \qquad \therefore \quad \mathrm{ID} > \mathrm{BC}$$

である．

$\triangle$ABC，$\triangle$AID，$\triangle$BEF，$\triangle$CGH の外接円の半径をそれぞれ R, R_{A}，R_{B}，R_{C} とすると，正弦定理より

$$2R_{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{ID}}{\sin(180^\circ - A)} = \frac{\mathrm{ID}}{\sin A} > \frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = 2R$$

$$\therefore \quad R_{\mathrm{A}} > R \quad \boxed{\mathbf{2}}$$

$\cdots\cdots$ (ソの答)

である．

- $0^\circ < A < B < C < 90^\circ$ のとき，上と同じく

  $$R_{\mathrm{B}} > R, \quad R_{\mathrm{C}} > R$$

  が成り立つから，外接円の半径が最も小さい三角形は $\triangle$ABC である． $\boxed{\mathbf{0}}$

  $\cdots\cdots$ (タの答)

- $0^\circ < A < B < 90^\circ < C$ のとき，まずは

  $$R_{\mathrm{A}} > R, \quad R_{\mathrm{B}} > R$$

  である．つぎに

  $$\mathrm{GH}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - C) = a^2 + b^2 + 2bc\cos C$$

  $$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

  $\cos C < 0$ であるから

  $$\mathrm{GH}^2 < \mathrm{AB}^2 \qquad \therefore \quad \mathrm{GH} < \mathrm{AB}$$

  である．

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{CH}=\mathrm{CA}(=b),\ \mathrm{CD}=\mathrm{BC}(=a)\ \text{であるから，GH と AB の大小は}\ \angle\mathrm{GCH}\ \text{と}\\ C\ \text{の大小により決まる．}\ 90^\circ < C(< 180^\circ)\ \text{のとき}\\ \qquad \angle\mathrm{GCH}=180^\circ - C < 90^\circ < C \qquad \therefore\quad \mathrm{GH}<\mathrm{AB}\\ \text{である．}\end{array}\right.$$

したがって

$$2R_{\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{GH}}{\sin(180^\circ - C)}=\frac{\mathrm{GH}}{\sin C}<\frac{\mathrm{AB}}{\sin C}=2R$$

$$\therefore\quad R_{\mathrm{C}}<R$$

よって，外接円の半径が最も小さい三角形は $\triangle$CGH である． $\boxed{\mathbf{3}}$ …… (チの答)

(6) $\triangle$ABC，$\triangle$AID，$\triangle$BEF，$\triangle$CGH の内接円の半径をそれぞれ r，r_{A}，r_{B}，r_{C} とする．
$0^\circ < A < B < C < 90^\circ$ のとき，$\triangle$ABC と $\triangle$AID について

$$T=\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{1}{2}(a+b+\mathrm{ID})r_{\mathrm{A}}$$

であるから

$$r=\frac{2T}{a+b+c},\quad r_{\mathrm{A}}=\frac{2T}{\mathrm{ID}+b+c}$$

$A<90^\circ$ のとき，$\angle\mathrm{DAI}>90^\circ$ より，$a<\mathrm{ID}$ であり，$r>r_{\mathrm{A}}$ である．
同様にして，$r>r_{\mathrm{B}}$，$r>r_{\mathrm{C}}$ であるから，
内接円の半径が最も大きい三角形は $\triangle$ABC である． $\boxed{\mathbf{0}}$ …… (ツの答)

$0^\circ < A < B < 90^\circ < C$ のとき

$$r_{\mathrm{C}}=\frac{2T}{\mathrm{GH}+a+b}$$

$90^\circ < C$ のとき，$\angle\mathrm{GCH}<90^\circ$ より，$c>\mathrm{GH}$ であり， $r<r_{\mathrm{C}}$ である．
$A<B<90^\circ$ より，$r>r_{\mathrm{A}}$，$r>r_{\mathrm{B}}$ であるから，
内接円の半径が最も大きい三角形は $\triangle$CGH である． $\boxed{\mathbf{3}}$ …… (テの答)