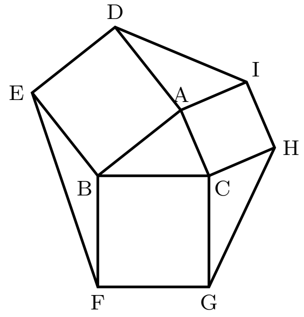
右の図のように，△ABC の外側に辺 AB，BC，CA をそれぞれ 1 辺とする正方形 ADEB，BFGC，CHIA をかき，2 点 E と F，G と H，I と D をそれぞれ線分で結んだ図形を考える．以下において

$$\mathrm{BC}=a,\quad \mathrm{CA}=b,\quad \mathrm{AB}=c$$
$$\angle\mathrm{CAB}=A,\quad \angle\mathrm{ABC}=B,\quad \angle\mathrm{BCA}=C$$

とする．



参考図

(1) $b=6$，$c=5$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin A=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$

であり，△ABC の面積は $\boxed{\text{タチ}}$, △AID の面積は $\boxed{\text{ツテ}}$ である．

(2) 正方形 BFGC，CHIA，ADEB の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とする．このとき，$S_1-S_2-S_3$ は

- $0°<A<90°$ のとき，$\boxed{\text{ト}}$.
- $A=90°$ のとき，$\boxed{\text{ナ}}$.
- $90°<A<180°$ のとき，$\boxed{\text{ニ}}$.

$\boxed{\text{ト}}$ ～ $\boxed{\text{ニ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい.）

⓪ 0 である
① 正の値である
② 負の値である
③ 正の値も負の値もとる

(3) △AID，△BEF，△CGH の面積をそれぞれ T_1，T_2，T_3 とする．このとき，$\boxed{\text{ヌ}}$ である．

$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群

⓪ $a<b<c$ ならば，$T_1>T_2>T_3$
① $a<b<c$ ならば，$T_1<T_2<T_3$
② A が鈍角ならば,$T_1<T_2$ かつ $T_1<T_3$
③ a，b，c の値に関係なく，$T_1=T_2=T_3$

(4) △ABC，△AID，△BEF，△CGH のうち，外接円の半径が最も小さいものを求める．

$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき，ID $\boxed{\text{ネ}}$ BC であり

（△AID の外接円の半径）$\boxed{\text{ノ}}$（△ABC の外接円の半径）

であるから，外接円の半径が最も小さい三角形は

- $0^\circ < A < B < C < 90^\circ$ のとき，$\boxed{\text{ハ}}$ である．
- $0^\circ < A < B < 90^\circ < C$ のとき，$\boxed{\text{ヒ}}$ である．

$\boxed{\text{ネ}}$，$\boxed{\text{ノ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい．）

0 $<$	1 $=$	2 $>$

$\boxed{\text{ハ}}$，$\boxed{\text{ヒ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい．）

0 △ABC	1 △AID	2 △BEF	3 △CGH

(21 共通テスト IA 1[2])

【答】

セ	ソ	タチ	ツテ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ
4	5	12	12	2	0	1	3	2	2	0	3

【解答】

(1) $0^\circ < A < 180^\circ$ であるから，$\cos A = \dfrac{3}{5}$ のとき

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{\boxed{\mathbf{4}}}{\boxed{\mathbf{5}}} \qquad \cdots\cdots\ (\text{セ，ソの答})$$

であり，さらに，$b=6$，$c=5$ であるから

$$(\triangle\text{ABC の面積}) = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{4}{5} = \boxed{\mathbf{12}} \qquad \cdots\cdots\ (\text{タチの答})$$

$$\begin{aligned}(\triangle\text{AID の面積}) &= \frac{1}{2}bc\sin(360^\circ-(90^\circ+A+90^\circ))\\ &= \frac{1}{2}bc\sin(180^\circ-A)\\ &= \frac{1}{2}bc\sin A = \boxed{\mathbf{12}} \qquad \cdots\cdots\ (\text{ツテの答})\end{aligned}$$

である．

(2) 正方形 BFGC，CHIA，ADEB の辺の長さはそれぞれ a, b, c であるから

$$\begin{aligned}S_1 - S_2 - S_3 &= a^2 - b^2 - c^2\\ &= (b^2+c^2-2bc\cos A) - b^2 - c^2 \quad (\because\ \text{余弦定理})\\ &= -2bc\cos A\end{aligned}$$

であり，$S_1 - S_2 - S_3$ は

- $0^\circ < A < 90^\circ$ のとき，$\cos A > 0$ であるから，負の値である．$\boxed{\boxed{2}}$ $\cdots\cdots$ (トの答)
- $A = 90^\circ$ のとき，$\cos A = 0$ であるから，0 である．$\boxed{\boxed{0}}$ $\cdots\cdots$ (ナの答)
- $90^\circ < A < 180^\circ$ のとき，$\cos A < 0$ であるから，正の値である．$\boxed{\boxed{1}}$ $\cdots\cdots$ (二の答)

(3) $\angle\mathrm{IAD} = 180^\circ - A$，$\angle\mathrm{EBF} = 180^\circ - B$，$\angle\mathrm{GCH} = 180^\circ - C$ であるから，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を T とすると

$$T_1 = \frac{1}{2}bc\sin(180^\circ - A) = \frac{1}{2}bc\sin A = T$$
$$T_2 = \frac{1}{2}ca\sin(180^\circ - B) = \frac{1}{2}ca\sin B = T$$
$$T_1 = \frac{1}{2}ab\sin(180^\circ - C) = \frac{1}{2}ab\sin C = T$$

であり，a，b，c の値に関係なく，$T_1 = T_2 = T_3$ である．$\boxed{\boxed{3}}$ $\cdots\cdots$ (ヌの答)

(4) 余弦定理を用いると

$$\mathrm{ID}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180^\circ - A) = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$
$$\mathrm{BC}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

であり，$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき，$\cos A > 0$ であるから

$$\mathrm{ID}^2 > \mathrm{BC}^2 \qquad \therefore \quad \mathrm{ID} > \mathrm{BC} \quad \boxed{\boxed{2}}$$ $\cdots\cdots$ (ネの答)

である．

$\mathrm{AI} = \mathrm{AC}(= b)$，$\mathrm{AD} = \mathrm{AB}(= c)$ であるから，ID と BC の大小は $\angle\mathrm{IAD}$ と A の大小により決まる．$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき

$$\angle\mathrm{IAD} = 180^\circ - A > 90^\circ > A \qquad \therefore \quad \mathrm{ID} > \mathrm{BC}$$

である．

$\triangle\mathrm{ABC}$，$\triangle\mathrm{AID}$，$\triangle\mathrm{BEF}$，$\triangle\mathrm{CGH}$ の外接円の半径をそれぞれ R，R_A，R_B，R_C とすると，正弦定理より

$$2R_\mathrm{A} = \frac{\mathrm{ID}}{\sin(180^\circ - A)} = \frac{\mathrm{ID}}{\sin A} > \frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = 2R$$
$$\therefore \quad R_\mathrm{A} > R \quad \boxed{\boxed{2}}$$ $\cdots\cdots$ (ノの答)

である．

- $0^\circ < A < B < C < 90^\circ$ のとき，上と同じく

  $$R_\mathrm{B} > R, \quad R_\mathrm{C} > R$$

  が成り立つから，外接円の半径が最も小さい三角形は $\triangle\mathrm{ABC}$ である．$\boxed{\boxed{0}}$ $\cdots\cdots$ (ハの答)

- $0^\circ < A < B < 90^\circ < C$ のとき，まずは

  $$R_\mathrm{A} > R, \quad R_\mathrm{B} > R$$

  である．つぎに

  $$\mathrm{GH}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - C) = a^2 + b^2 + 2bc\cos C$$
  $$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$\cos C < 0$ であるから

$$\mathrm{GH}^2 < \mathrm{AB}^2 \qquad \therefore \quad \mathrm{GH} < \mathrm{AB}$$

である．

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{CH} = \mathrm{CA}(= b),\ \mathrm{CD} = \mathrm{BC}(= a) \text{ であるから，GH と AB の大小は } \angle\mathrm{GCH} \text{ と} \\ C \text{ の大小により決まる．} 90^\circ < C(< 180^\circ) \text{ のとき} \\ \qquad \angle\mathrm{GCH} = 180^\circ - C < 90^\circ < C \qquad \therefore \quad \mathrm{GH} < \mathrm{AB} \\ \text{である．}\end{array}\right.$$

したがって

$$2R_{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{GH}}{\sin(180^\circ - C)} = \frac{\mathrm{GH}}{\sin C} < \frac{\mathrm{AB}}{\sin C} = 2R$$

$$\therefore \quad R_{\mathrm{C}} < R$$

よって，外接円の半径が最も小さい三角形は △CGH である． $\boxed{\mathbf{3}}$ …… (ヒの答)