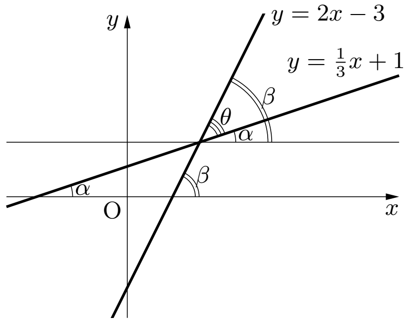
座標平面上の 2 つの直線 $y=\dfrac{1}{3}x+1$ と $y=2x-3$ がなす角 θ の大きさを求めなさい．ただし，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(21 公立千歳科技大 理工 1(2))

【答】 $\theta=\frac{\pi}{4}$

【解答】



直線 $y=\dfrac{1}{3}x+1$，$y=2x-3$ が x 軸の正方向となす角をそれぞれ α，β $\left(0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，求める角 θ は $\theta=\beta-\alpha$ である．

$$\tan\alpha=\frac{1}{3},\ \tan\beta=2$$

より

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan(\beta-\alpha)\\&=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\\&=\frac{2-\dfrac{1}{3}}{1+2\cdot\dfrac{1}{3}}\\&=1\end{aligned}$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 2 直線は垂直ではないので，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ すなわち，θ は鋭角であり，α，β の範囲および大小をおさえることなく
$$\tan\theta=\left|\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\right|=\cdots=1 \qquad \therefore\quad \theta=\frac{\pi}{4}$$
としてもよい．
- 内積 (ベクトル) を利用してもよい．

  2 直線 $l_1: y=\dfrac{1}{3}x+1$，$l_2: y=2x-3$ のそれぞれの方向ベクトルとして $\overrightarrow{l_1}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{l_2}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ をとることができる．l_1，l_2 のなす角 θ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから
$$\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{l_1}\cdot\overrightarrow{l_2}}{|\overrightarrow{l_1}||\overrightarrow{l_2}|}\right|=\frac{|3\times1+1\times2|}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
であり，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ である．

  法線ベクトルでもよい．2 直線は $l_1: x-3y+3=0$，$l_2: 2x-y-3=$ と表すことができ，それぞれの法線ベクトルとして $\overrightarrow{n_1}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{n_2}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ をとることができる．l_1，l_2 のなす角 θ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから
$$\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|=\frac{|1\times2+(-3)\times(-1)|}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
であり，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ である．