方程式，2 倍角の公式

次の問いに答えなさい．

(1) $0 < \alpha < 2\pi$，$0 < \beta < 2\pi$ とする．$\cos\alpha = \cos\beta$ ならば，$\alpha = \beta$ または $\alpha + \beta = 2\pi$ であることを示しなさい．

(2) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とする．$\cos\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ のとき，$\cos 2\alpha$ と $\cos 4\alpha$ の値を求めなさい．

(3) (2) の α の値を求めなさい．

(4) $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．$\cos\beta \geqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ のとき，$\beta < \dfrac{\pi}{4}$ であることを示しなさい．

(21 北海道教大 1)

【答】

(1) 略

(2) $\cos 2\alpha = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$，$\cos 4\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(3) $\alpha = \dfrac{2\pi}{5}$

(4) 略

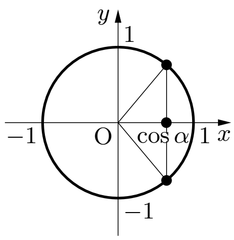
【解答】

(1) $$\cos\alpha = \cos\beta$$

ならば

$$\beta = \pm\alpha + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$\therefore \quad \beta - \alpha = 2n\pi \text{ または } \alpha + \beta = 2n\pi \qquad \cdots\cdots ①$$



$0 < \alpha < 2\pi$, $0 < \beta < 2\pi$ であるから

$$-2\pi < \beta - \alpha < 2\pi \text{ または } 0 < \alpha + \beta < 4\pi$$

であり，① を満たす α, β の関係式は

$$\beta - \alpha = 0 \text{ または } \alpha + \beta = 2\pi$$

$$\therefore \quad \beta = \alpha \text{ または } \alpha + \beta = 2\pi$$

$\cdots\cdots$ (証明終わり)

である．

- 和を積に直す公式を用いることもできる．
  $\cos\alpha = \cos\beta$ を変形すると

$$\cos\alpha - \cos\beta = 0$$

$$\therefore \quad -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$$

$$\therefore \quad \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 0 \text{ または } \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$$

$0<\alpha<2\pi,\ 0<\beta<2\pi$ であるから $0<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<2\pi,\ -\pi<\dfrac{\alpha-\beta}{2}<\pi$ であり

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi \text{ または } \frac{\alpha-\beta}{2}=0$$
$$\therefore\quad \alpha+\beta=2\pi \text{ または } \alpha=\beta$$

である．

(2) 2 倍角の公式を用い，$\cos\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ を代入すると

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2-1$$
$$=2\cdot\frac{6-2\sqrt{5}}{16}-1=\boldsymbol{\frac{-1-\sqrt{5}}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

さらに

$$\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1=2\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)^2-1$$
$$=2\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{16}-1=\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (2) より $\cos\alpha=\cos 4\alpha$ である．$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<4\alpha<2\pi$ であるから，(1) より

$$\alpha=4\alpha \text{ または } \alpha+4\alpha=2\pi$$
$$\therefore\quad \alpha=0 \text{ または } \alpha=\frac{2\pi}{5}$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{2\pi}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $\cos x$ は単調減少であるから，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して $\beta<\dfrac{\pi}{4}$ であることを示すには，$\cos\beta>\cos\dfrac{\pi}{4}$ を示せばよい．$\cos\beta\geqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ のとき

$$\cos^2\beta-\cos^2\frac{\pi}{4}\geqq\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$=\frac{3+\sqrt{5}}{8}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$$
$$>0$$

したがって，$\cos\beta>\cos\dfrac{\pi}{4}$ は成り立つ．すなわち，$\beta<\dfrac{\pi}{4}$ である．　　…… (証明終わり)