$a=\cos\dfrac{\pi}{5}$，$b=\cos\dfrac{\pi}{7}$ とする．

(1) $\cos\dfrac{\pi}{10}$ を a を用いた式で表せ．

(2) $\sin\dfrac{\pi}{14}$ を b を用いた式で表せ．

(3) $\cos\dfrac{\pi}{35}$ を a と b を用いた式で表せ．

(21 愛知教大 1)

【答】

(1) $\cos\dfrac{\pi}{10}=\sqrt{\dfrac{1+a}{2}}$

(2) $\sin\dfrac{\pi}{14}=\sqrt{\dfrac{1-b}{2}}$

(3) $\cos\dfrac{\pi}{35}=\dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{(1+a)(1+b)}+\sqrt{(1-a)(1-b)}\right\}$

【解答】

(1) 半角の公式を用いる．

$$\cos^2\frac{\pi}{10}=\cos^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\cos\frac{\pi}{5}}{2}=\frac{1+a}{2}$$

である．$0<\dfrac{\pi}{10}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\cos\dfrac{\pi}{10}>0$ であり

$$\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{1+a}{2}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 同じく

$$\sin^2\frac{\pi}{14}=\sin^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{7}\right)=\frac{1-\cos\frac{\pi}{7}}{2}=\frac{1-b}{2}$$

である．$0<\dfrac{\pi}{14}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\sin\dfrac{\pi}{14}>0$ であり

$$\boldsymbol{\sin\frac{\pi}{14}=\sqrt{\frac{1-b}{2}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3)
$$\frac{\pi}{35}=\frac{\pi}{5\cdot 7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\pi=\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{14}$$

加法定理より

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{35}&=\cos\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{14}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{14}+\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{14} \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

ここで，$\sin\dfrac{\pi}{10}>0$，$\cos\dfrac{\pi}{14}>0$ であることに注意すると，(1)，(2) より

$$\sin\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{10}}=\sqrt{1-\frac{1+a}{2}}=\sqrt{\frac{1-a}{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{14}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{14}}=\sqrt{1-\frac{1-b}{2}}=\sqrt{\frac{1+b}{2}}$$

であるから，① は

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{35}&=\sqrt{\frac{1+a}{2}}\sqrt{\frac{1+b}{2}}+\sqrt{\frac{1-a}{2}}\sqrt{\frac{1-b}{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(1+a)(1+b)}+\sqrt{(1-a)(1-b)}\right\}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

となる．