(1) 次の**問題 A** について考えよう．

問題 A　関数 $y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ．

$$\sin\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}=\frac{1}{2}$$

であるから，三角関数の合成により

$$y=\boxed{\text{イ}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}\right)$$

と変形できる．よって，y は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる．

(2) p を定数とし，次の**問題 B** について考えよう．

問題 B　関数 $y=\sin\theta+p\cos\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ．

(i) $p=0$ のとき，y は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる．

(ii) $p>0$ のときは，加法定理

$$\cos(\theta-\alpha)=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha$$

を用いると

$$y=\sin\theta+p\cos\theta=\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\cos(\theta-\alpha)$$

と表すことができる．ただし，α は

$$\sin\alpha=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}},\quad \cos\alpha=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}},\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする．このとき，y は $\theta=\boxed{\text{コ}}$ で最大値 $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ をとる．

(iii) $p<0$ のとき，y は $\theta=\boxed{\text{シ}}$ で最大値 $\boxed{\text{ス}}$ をとる．

$\boxed{\text{キ}}$〜$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい.）

⓪ -1	① 1	② $-p$
③ p	④ $1-p$	⑤ $1+p$
⑥ $-p^2$	⑦ p^2	⑧ $1-p^2$
⑨ $1+p^2$	⑩ $(1-p)^2$	⑪ $(1+p)^2$

$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

⓪ 0	① α	② $\dfrac{\pi}{2}$

(21 共通テスト IIB 1[1])

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
3	2	6	2	2	1	9	1	3	1	9	2	1

【解答】

(1) $\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\mathbf{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ であるから …… (アの答)

$$\begin{aligned} y &= \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) \\ &= 2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \boxed{\mathbf{2}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

…… (イの答)

と変形できる．θ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くから，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ であり

$$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

すなわち，y は

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{\boxed{\mathbf{6}}} \text{ で最大値} \boxed{\mathbf{2}}$$

…… (ウ，エの答)

をとる．

(2) (i) $p = 0$ のとき

$$y = \sin\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

であり，y は

$$\theta = \frac{\pi}{\boxed{\mathbf{2}}} \text{ で最大値} \boxed{\mathbf{1}}$$

…… (オ，カの答)

をとる．

(ii) $p > 0$ のとき

$$\begin{aligned} y &= \sin\theta + p\cos\theta \\ &= \sqrt{1+p^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta\right) \end{aligned}$$

$\left(\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)^2 = 1$, $\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}} > 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}} > 0$ であるから

$$\cos\alpha = \frac{\boxed{p}}{\sqrt{1+p^2}} \boxed{\boxed{\mathbf{3}}}, \quad \sin\alpha = \frac{\boxed{\mathbf{1}}}{\sqrt{1+p^2}} \boxed{\boxed{\mathbf{1}}}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

…… (ケ，クの答)

を満たす α が存在し，このとき

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1+p^2}(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) \\ &= \sqrt{1+p^2}\cos(\theta - \alpha) \boxed{\boxed{\mathbf{9}}} \end{aligned}$$

…… (キの答)

である．θ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くから，$-\alpha \leqq \theta - \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ であり

$$\theta - \alpha = 0$$

すなわち，y は

$$\theta = \boxed{\alpha} \text{で最大値} \sqrt{\boxed{1+p^2}} \quad \boxed{\boxed{\mathbf{1}}}, \boxed{\boxed{\mathbf{9}}} \qquad \cdots\cdots \text{(コ，サの答)}$$

をとる．

(iii) $p < 0$ のとき

(2) の α は，$\left(\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)^2 = 1$，$\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}} < 0$，$\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}} > 0$ であるから，α は

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

の範囲でとることができ，$-\alpha \leqq \theta - \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ であるから，y は

$$\theta - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

すなわち

$$\theta = \boxed{\frac{\pi}{2}} \text{で最大値} \boxed{\mathbf{1}} \quad \boxed{\boxed{\mathbf{2}}}, \boxed{\boxed{\mathbf{1}}} \qquad \cdots\cdots \text{(シ，スの答)}$$

をとる．