多項式 $f_n(x)$，$g_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を条件

$$f_1(x)=x,\quad g_1(x)=1,$$
$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+xg_n(x),\quad g_{n+1}(x)=g_n(x)-xf_n(x)$$

で定める．

(1) 正の整数 n に対して，等式

$$\{f_{n+1}(x)\}'=(n+1)g_n(x),\quad \{g_{n+1}(x)\}'=-(n+1)f_n(x)$$

が成り立つことを示し，多項式 $f_n(x)$ の次数を求めよ．

(2) 正の整数 n に対して，区間 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において等式

$$\sin n\theta=f_n(\tan\theta)\cos^n\theta,\quad \cos n\theta=g_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

が成り立つことを示せ．

(3) 正の整数 n と実数 a に対して，方程式 $f_n(x)=ag_n(x)$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(21 千葉大 9)

【答】

(1) 証明は略．$(f_n(x)$ の次数$)=\begin{cases} n & (n\text{ が奇数のとき}) \\ n-1 & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$

(2) 略

(3) (実数解の個数) $=\begin{cases} n-1 & (a=0\text{ かつ }n\text{ が偶数のとき}) \\ n & (\text{上記以外のとき}) \end{cases}$

【解答】

$$f_1(x)=x,\quad g_1(x)=1,$$
$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+xg_n(x),\quad g_{n+1}(x)=g_n(x)-xf_n(x)\qquad (n\geqq 1)$$

(1) 正の整数 n に対して，等式

$$\{f_{n+1}(x)\}'=(n+1)g_n(x),\quad \{g_{n+1}(x)\}'=-(n+1)f_n(x)\qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す．

(i) $n=1$ のとき

$$f_2(x)=f_1(x)+xg_1(x)=x+x\cdot 1=2x,$$
$$g_2(x)=g_1(x)-xf_1(x)=1-x\cdot x=-x^2+1$$

であるから

$$f_2{}'(x)=2=2\cdot 1=2g_1(x),$$
$$g_2{}'(x)=-2x=-2\cdot x=-2f_1(x)$$

となり，$n=1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定すると

$$\begin{aligned}
&\{f_{k+2}(x)\}'\\
&=\{f_{k+1}(x)+xg_{k+1}(x)\}'\\
&=(k+1)g_k(x)+1\cdot g_{k+1}(x)+x\cdot\{-(k+1)f_k(x)\}\quad (\because\ \text{帰納法の仮定})\\
&=(k+1)\{g_k(x)-xf_k(x)\}+g_{k+1}(x)\\
&=(k+1)g_{k+1}(x)+g_{k+1}(x)\\
&=(k+2)g_{k+1}(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{g_{k+2}(x)\}' \\
&= \{g_{k+1}(x) - xf_{k+1}(x)\}' \\
&= -(k+1)f_k(x) - 1 \cdot f_{k+1}(x) - x \cdot (k+1)g_k(x) \quad (\because \text{ 帰納法の仮定}) \\
&= -(k+1)\{f_k(x) + xg_k(x)\} - f_{k+1}(x) \\
&= -(k+1)f_{k+1}(x) - f_{k+1}(x) \\
&= -(k+2)f_{k+1}(x)
\end{aligned}$$

であり，$n = k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての正の整数 n に対して $(*)$ は成り立つ．　　……(証明終わり)

次に，多項式 $f_n(x)$，$g_n(x)$ の次数をそれぞれ a_n，b_n とおくと

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0$$

であり，$(*)$ より

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n + 1 \\ b_{n+1} = a_n + 1 \end{cases} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots (**)$$

が成り立つ．

$$a_{n+2} = b_{n+1} + 1 = (a_n + 1) + 1 = a_n + 2$$

であり，$a_1 = 1$，$a_2 = b_1 + 1 = 0 + 1 = 1$ であるから，n の偶奇で場合分けすると

$n = 2l-1$ のとき　$a_{2l-1} = a_1 + 2(l-1) = 2l - 1 = 2 \cdot \dfrac{n+1}{2} - 1 = n$

$n = 2l$ のとき　$a_{2l} = a_2 + 2(l-1) = 2l - 1 = 2 \cdot \dfrac{n}{2} - 1 = n - 1$

となる．よって

$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} n & (n \text{ が奇数のとき}) \\ n-1 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- a_n，b_n の連立漸化式 $(**)$ は

$$(**) \iff \begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n + 2 \\ a_{n+1} - b_{n+1} = -(a_n - b_n) \end{cases}$$

　であるから

$$\begin{cases} a_n + b_n = (a_1 + b_1) + 2(n-1) = (1+0) + 2(n-1) = 2n - 1 \\ a_n - b_n = (a_1 - b_1)(-1)^{n-1} = (1-0)(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} \end{cases}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{2n - 1 + (-1)^{n-1}}{2}$$

　である．

(2) 正の整数 n に対して，区間 $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において等式

$$\sin n\theta = f_n(\tan\theta)\cos^n\theta, \quad \cos n\theta = g_n(\tan\theta)\cos^n\theta \qquad \cdots\cdots (***)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す．

(i) $n = 1$ のとき

$$f_1(\tan\theta)\cos\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta = \sin\theta,$$
$$g_1(\tan\theta)\cos\theta = 1 \cdot \cos\theta = \cos\theta$$

であり，$n = 1$ のとき $(***)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定すると

$$
\begin{aligned}
f_{k+1}(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta &= \{f_k(\tan\theta)+\tan\theta\cdot g_k(\tan\theta)\}\cos^{k+1}\theta \\
&= f_k(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta+\tan\theta\cdot g_k(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta \\
&= \sin k\theta\cos\theta+\tan\theta\cos k\theta\cos\theta \quad (\because \text{ 帰納法の仮定}) \\
&= \sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta \\
&= \sin(k\theta+\theta) \\
&= \sin(k+1)\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{k+1}(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta &= \{g_k(\tan\theta)-\tan\theta\cdot f_k(\tan\theta)\}\cos^{k+1}\theta \\
&= g_k(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta-\tan\theta\cdot f_k(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta \\
&= \cos k\theta\cos\theta-\tan\theta\sin k\theta\cos\theta \quad (\because \text{ 帰納法の仮定}) \\
&= \cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta \\
&= \cos(k\theta+\theta) \\
&= \cos(k+1)\theta
\end{aligned}
$$

であり，$n=k+1$ のときも $(***)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての正の整数 n に対して $(***)$ は成り立つ．　　　……(証明終わり)

(3) $x=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，x と θ は 1 対 1 に対応するから

$f_n(x)=ag_n(x)$ の異なる実数解 x の個数

は

$f_n(\tan\theta)=ag_n(\tan\theta)$ …… (★) を満たす $\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の個数

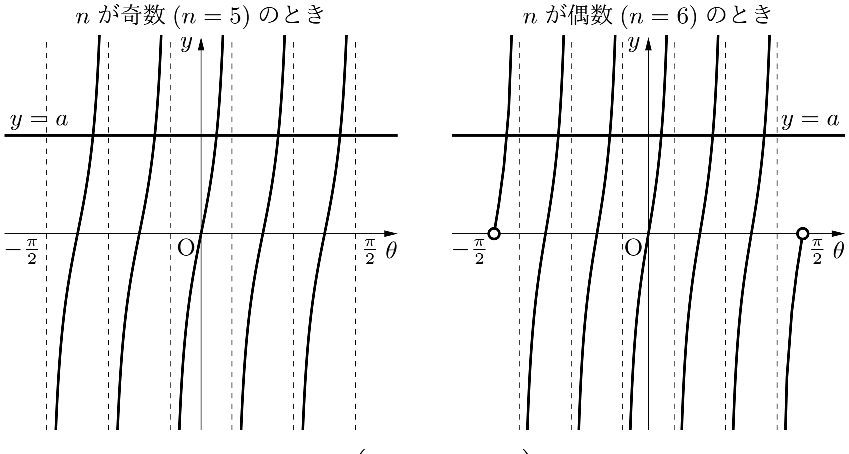
と一致する．$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta\neq 0$ であるから，$\cos^n\theta\neq 0$ であり，$(***)$ より

$$
\begin{aligned}
(★) &\iff f_n(\tan\theta)\cos^n\theta=ag_n(\tan\theta)\cos^n\theta \\
&\iff \sin n\theta=a\cos n\theta
\end{aligned}
$$

$\cos n\theta=0$ とすると $\sin n\theta\neq 0$ であり，この等式は成り立たないから，$\cos n\theta\neq 0$ である．したがって (★) は

$\tan n\theta=a$

と変形される．$y=\tan n\theta$ は基本周期 $\dfrac{\pi}{n}$ の関数であり，そのグラフは下図となる．



(★) を満たす θ の個数は，$y=\tan n\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=a$ の共有点の個数であり

$a \fallingdotseq 0$ のとき，　n 個
$a = 0$ のとき，　n が奇数のとき n 個，n が偶数のとき $n-1$ 個

である．よって，求める実数解 x の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{n-1} & \textbf{(}\boldsymbol{a=0}\ \textbf{かつ}\ \boldsymbol{n}\ \textbf{が偶数のとき)} \\ \boldsymbol{n} & \textbf{(上記以外のとき)} \end{cases}$$ ……(答)

である．