xy 平面上に原点を中心とする半径 1 の円 C と，点 $\mathrm{A}\left(-2,\ -2\sqrt{3}\right)$ および点 $\mathrm{B}\left(-4,\ -\sqrt{3}\right)$ がある．円 C 上に点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる．$\angle\mathrm{APB}=\alpha$ とおく．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$，$0 < \alpha < \pi$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 直線 AP の傾きは直線 BP の傾きより大きいことを示せ．

(2) $\tan\alpha$ を θ を用いて表せ．

(3) $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ となる点 P をすべて求めよ．

(21 奈良女大 理 2)

【答】

(1) 略

(2) $\tan\alpha = \dfrac{2\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sin\theta + 6\cos\theta + 15}$

(3) $(1,\ 0)$, $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

【解答】

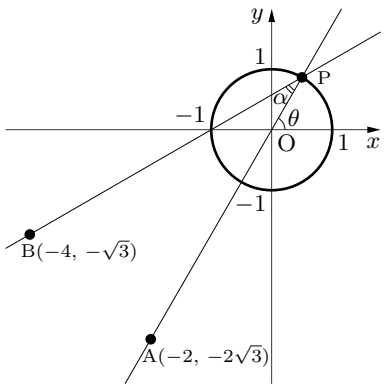
(1) 直線 AP，BP の傾きをそれぞれ p, q とおくと

$$p = \frac{\sin\theta + 2\sqrt{3}}{\cos\theta + 2}, \quad q = \frac{\sin\theta + \sqrt{3}}{\cos\theta + 4}$$

であり

$$\begin{aligned}
&p - q \\
&= \frac{\sin\theta + 2\sqrt{3}}{\cos\theta + 2} - \frac{\sin\theta + \sqrt{3}}{\cos\theta + 4} \\
&= \frac{(\sin\theta + 2\sqrt{3})(\cos\theta + 4) - (\sin\theta + \sqrt{3})(\cos\theta + 2)}{(\cos\theta + 2)(\cos\theta + 4)} \\
&= \frac{(\sin\theta\cos\theta + 4\sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta + 8\sqrt{3}) - (\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 2\sqrt{3})}{(\cos\theta + 2)(\cos\theta + 4)} \\
&= \frac{2\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 6\sqrt{3}}{(\cos\theta + 2)(\cos\theta + 4)} \\
&> 0 \quad (\because\ (\text{分子}) > 0,\ (\text{分母}) > 0)
\end{aligned}$$

よって，直線 AP の傾き p は直線 BP の傾き q より大きい．　　…… (証明終わり)



- $\sin\theta + \sqrt{3} > 0$ より，q の分母を $\cos\theta + 2$ に変えると

$$q = \frac{\sin\theta + \sqrt{3}}{\cos\theta + 4} < \frac{\sin\theta + \sqrt{3}}{\cos\theta + 2}$$

である．これを用いて

$$\begin{aligned}
p - q &> \frac{\sin\theta + 2\sqrt{3}}{\cos\theta + 2} - \frac{\sin\theta + \sqrt{3}}{\cos\theta + 2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta + 2} > 0
\end{aligned}$$

としてもよい．

(2) 直線 AP，BP の x 軸の正方向から測った角をそれぞれ φ_{A}，φ_{B} とおくと，$p>0$，$q>0$ より

$$p=\tan\varphi_{\mathrm{A}},\quad q=\tan\varphi_{\mathrm{B}}\qquad \left(0<\varphi_{\mathrm{A}}<\frac{\pi}{2},\ 0<\varphi_{\mathrm{B}}<\frac{\pi}{2}\right)$$

であり，(1) より

$$0<\varphi_B<\varphi_A<\frac{\pi}{2}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\tan\alpha=\tan(\varphi_{\mathrm{A}}-\varphi_{\mathrm{B}})&=\frac{\tan\varphi_{\mathrm{A}}-\tan\varphi_{\mathrm{B}}}{1+\tan\varphi_{\mathrm{A}}\tan\varphi_{\mathrm{B}}}=\frac{p-q}{1+pq}\\&=\frac{\dfrac{\sin\theta+2\sqrt{3}}{\cos\theta+2}-\dfrac{\sin\theta+\sqrt{3}}{\cos\theta+4}}{1+\dfrac{\sin\theta+2\sqrt{3}}{\cos\theta+2}\cdot\dfrac{\sin\theta+\sqrt{3}}{\cos\theta+4}}\\&=\frac{2\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta+6\sqrt{3}}{(\cos\theta+2)(\cos\theta+4)+(\sin\theta+2\sqrt{3})(\sin\theta+\sqrt{3})}\\&\qquad(\because\ \text{分子は (1) で計算済み})\\&=\boldsymbol{\frac{2\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sin\theta+6\cos\theta+15}}\end{aligned}$$

……(答)

となる．

(3) $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ となるのは，$\tan\alpha=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となるときである．(2) の結果より

$$\begin{aligned}&\frac{2\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sin\theta+6\cos\theta+15}=\frac{1}{\sqrt{3}}\\&2\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta+6\sqrt{3}=3\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta+5\sqrt{3}\\&\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{3}\end{aligned}$$

左辺を合成すると

$$\begin{aligned}&2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\\&\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となるときである．ここで，$0\leqq\theta<2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$ であるから

$$\begin{aligned}&\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi\\&\therefore\quad\theta=0,\ \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

である．求める点 P の座標は

$$\boldsymbol{(1,\ 0),\quad\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

……(答)

である．