座標平面上に曲線 $C : y = \dfrac{1}{x}$ および 3 点 A$(-1,\ -1)$，B$(-1,\ 0)$, D$(1,\ 0)$ がある．曲線 C 上の点 P$\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ に対して，直線 AP と直線 $y = -2$ の交点を Q とする．ただし，P が A と等しいとき，直線 AP とは A における C の接線のこととする．また，直線 BQ に点 D から下ろした垂線と直線 BQ の交点を R とする．

(1) 点 P が曲線 C 上を動くとき，点 R の軌跡を求めよ．
(2) 直線 PR が原点を通るような実数 t の個数を求めよ．

(21 千葉大 6)

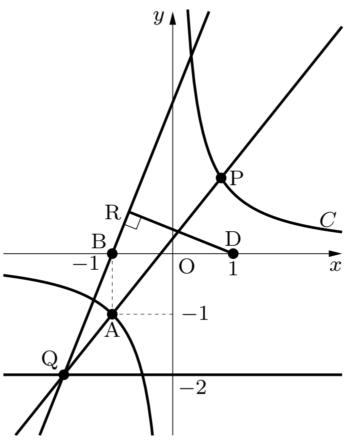
【答】

(1) $x^2 + y^2 = 1$ かつ $y \fallingdotseq 0$
(2) 1 個

【解答】

$$C : y = \frac{1}{x}$$

(1) A$(-1,\ -1)$，P$\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ を結ぶ直線 AP の方程式は



$t \fallingdotseq -1$ のとき

$$y = \frac{\frac{1}{t} + 1}{t + 1}(x + 1) - 1$$

$$\therefore\quad y = \frac{1}{t}x + \frac{1}{t} - 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$t = -1$ のとき，直線 AP は A における C の接線である．$y' = -\dfrac{1}{t^2}$ より

$$y = -\frac{1}{(-1)^2}(x + 1) - 1$$

$$\therefore\quad y = -x - 2$$

である．① は $t = -1$ のときも成り立つ．

直線 AP と直線 $y = -2$ の交点 Q の x 座標は

$$-2 = \frac{1}{t}x + \frac{1}{t} - 1 \qquad \therefore\quad x = -t - 1$$

であり，Q の座標は Q$(-t - 1,\ -2)$ である．したがって，B$(-1,\ 0)$ と Q を結ぶ直線 BQ の方程式は

$$y = \frac{0 + 2}{-1 + (t + 1)}(x + 1)$$

$$\therefore\quad y = \frac{2}{t}(x + 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

であり，D$(1,\ 0)$ から直線 BQ に下した垂線の足 R を通る直線 DR の方程式は

$$y = -\frac{t}{2}(x - 1) \qquad \cdots\cdots ③$$

である．点 R の軌跡は

②かつ③を満たす 0 でない実数 t が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合

である．$x=1$ とすると ③ より $y=0$ を得るが，$(x,\ y)=(1,\ 0)$ は②を満たさない．したがって $x \neq 1$ としてよい．

$$「②かつ③」 \iff \begin{cases} y=\dfrac{2}{t}(x+1) \\ t=-\dfrac{2y}{x-1} \end{cases} \iff \begin{cases} t=-\dfrac{2y}{x-1} \\ y=\dfrac{2}{-\dfrac{2y}{x-1}}(x+1) \end{cases} \iff \begin{cases} t=-\dfrac{2y}{x-1} \\ y^2=-(x^2-1) \end{cases}$$

$t \neq 0$ にも注意すると，点 R の軌跡は

$\boldsymbol{x^2+y^2=1}$ **かつ** $\boldsymbol{y \neq 0}$ ……(答)

である．

- 2 直線 BR，DR は直交するから，交点 R は B，D を直径の両端とする円 $x^2+y^2=1$ 上を動く．直線 BR の傾き $\dfrac{2}{t}$ $\left(あるいは直線 DR の傾き -\dfrac{t}{2}\right)$ は 0 以外のすべて実数を動くから，R の軌跡は

  $x^2+y^2=1$ かつ $y \neq 0$

  である．

(2) R は ②，③ の交点であるから，R の x 座標は

$$\frac{2}{t}(x+1)=-\frac{t}{2}(x-1)$$
$$\left(\frac{2}{t}+\frac{t}{2}\right)x=\frac{t}{2}-\frac{2}{t}$$
$$\frac{t^2+4}{2t}x=\frac{t^2-4}{2t} \qquad \therefore \quad x=\frac{t^2-4}{t^2+4}\ (t \neq 0)$$

このとき $y=\dfrac{2}{t}\left(\dfrac{t^2-4}{t^2+4}+1\right)=\dfrac{4t}{t^2+4}$ であり，R の座標は

$$\mathrm{R}\left(\frac{t^2-4}{t^2+4},\ \frac{4t}{t^2+4}\right)$$

である．

直線 PR が原点を通るのは，3 点 O，P，R が一直線上に並ぶときであり，それは $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が平行なときである．

$$t \times \frac{4t}{t^2+4}-\frac{1}{t} \times \frac{t^2-4}{t^2+4}=0$$
$$4t^3-t^2+4=0$$

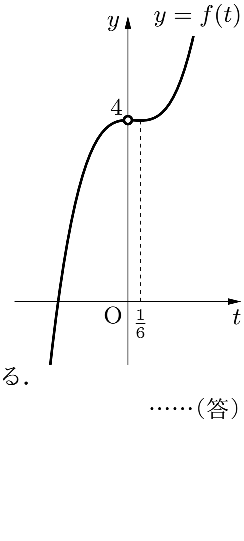
$f(t)=4t^3-t^2+4\ (t \neq 0)$ とおき，3 次方程式 $f(t)=0$ の 0 以外の実数解の個数を求める．

$$f'(t)=12t^2-2t=2t(6t-1)$$

$f(t)$ の増減は下表となる．

t	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	(0)	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(0)=4$$
$$f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{4}{6^3}-\frac{1}{6^2}+4=\frac{1}{6\cdot 9}-\frac{1}{6^2}+4>0$$



$y=f(t)\ (t \neq 0)$ のグラフは右図となり，t 軸との共有点は 1 個である．

よって，直線 PR が原点を通るような実数 t は **1 個**である． ……(答)

- ②, ② より

$$2x - ty + 2 + k(tx + 2y - t) = 0$$

は R を通る直線の方程式である．この直線が原点を通るのは

$$2 - kt = 0 \qquad \therefore \quad k = \frac{2}{t}$$

のときであり

$$2x - ty + 2 + \frac{2}{t}(tx + 2y - t) = 0$$

となる．さらにこの直線が P を通ることから

$$\left(2t - t \cdot \frac{1}{t} + 2\right) + \frac{2}{t}\left(t \cdot t + 2 \cdot \frac{1}{t} - t\right) = 0$$

$$\therefore \quad 4t^3 - t^2 + 4 = 0$$

を得る．