半径 r の円に内接する四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=3,\ \mathrm{BC}=\sqrt{2},\ \mathrm{CD}=3\sqrt{2},\ \mathrm{DA}=5$ である．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle\mathrm{DAB}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．
(2) BD の長さを求めなさい．
(3) r の値を求めなさい．
(4) 四角形 ABCD の面積を求めなさい．

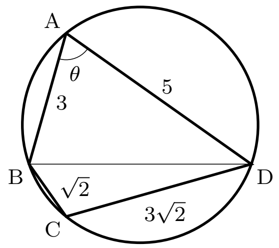
(21 岩手県大 ソフト情 1)

【答】

(1) $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$
(2) $\mathrm{BD}=2\sqrt{6}$
(3) $r=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
(4) $7\sqrt{2}$

【解答】

(1) △ABD において余弦定理を用いると



$$\mathrm{BD}^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos\theta$$

$$\therefore\quad \mathrm{BD}^2=34-30\cos\theta \qquad \cdots\cdots ①$$

である．また，四角形 ABCD は円に内接しているので $\angle\mathrm{BCD}=180^\circ-\theta$ である．△BCD において余弦定理を用いると

$$\mathrm{BD}^2=(\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}\cos(180^\circ-\theta)$$

$$\therefore\quad \mathrm{BD}^2=20+12\cos\theta \qquad \cdots\cdots ②$$

である．①，②より

$$34-30\cos\theta=20+12\cos\theta$$

$$\therefore\quad 42\cos\theta=14 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{\cos\theta=\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) の結果を ② に代入すると

$$\mathrm{BD}^2=20+12\cdot\frac{1}{3}=24 \qquad \therefore\quad \mathrm{BD}=\sqrt{24}=\boldsymbol{2\sqrt{6}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ であるから，△ABD において正弦定理を用いると

$$2r=\frac{\mathrm{BD}}{\sin\theta}=\frac{2\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=3\sqrt{3} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{r=\frac{3\sqrt{3}}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) 四角形 ABCD の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}&=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}\sin(180^\circ-\theta)\\&=\frac{15+6}{2}\sin\theta\\&=\frac{21}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\\&=\boldsymbol{7\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

である．