k は実数で $0 < k < \dfrac{1}{2}$ とする．面積が S である三角形 ABC の三辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 L，M，N を

$$\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CA}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AB}} = k$$

となるようにとる．次に，AL と BM の交点を P，BM と CN の交点を Q，AL と CN の交点を R とする．このとき，三角形 PQR の面積を T とする．

(1) 三角形 ABP の面積を U とするとき，$\dfrac{U}{S}$ を k で表せ．

(2) $T > \dfrac{1}{2}S$ となるための k に関する条件を求めよ．

(21 札幌医大 2)

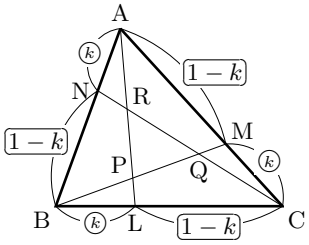
【答】

(1) $\dfrac{U}{S} = \dfrac{k-k^2}{1-k+k^2}$

(2) $0 < k < \dfrac{7-\sqrt{21}}{14}$

【解答】

(1) △ACL と直線 BM についてメネラウスの定理を用いると



$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PL}} \cdot \frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{BC}} \cdot \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{MA}} = 1$$
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PL}} \cdot \frac{k}{1} \cdot \frac{k}{1-k} = 1$$
$$\therefore \quad \mathrm{AP} : \mathrm{PL} = (1-k) : k^2$$

であるから

$$\begin{aligned} U &= (\triangle\mathrm{ABP}\text{ の面積}) \\ &= \frac{1-k}{(1-k)+k^2}(\triangle\mathrm{ABL}\text{ の面積}) \\ &= \frac{1-k}{1-k+k^2} \times k(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積}) \\ &= \frac{(1-k)k}{1-k+k^2}S \end{aligned}$$

である．よって

$$\boldsymbol{\frac{U}{S} = \frac{k-k^2}{1-k+k^2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) と同様にして

$$(\triangle\mathrm{BCQ}\text{ の面積}) = (\triangle\mathrm{CAR}\text{ の面積}) = \frac{k-k^2}{1-k+k^2}S$$

となるから

$$\begin{aligned} T &= (\triangle\mathrm{PQR}\text{ の面積}) \\ &= (\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積}) - \{(\triangle\mathrm{ABP}\text{ の面積}) + (\triangle\mathrm{BCQ}\text{ の面積}) + (\triangle\mathrm{CAR}\text{ の面積})\} \\ &= \left(1 - 3 \cdot \frac{k-k^2}{1-k+k^2}\right)S \\ &= \frac{1-4k+4k^2}{1-k+k^2}S \end{aligned}$$

である．

$T > \dfrac{1}{2}S$ となる条件は

$$\frac{1-4k+4k^2}{1-k+k^2} > \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots (*)$$

である．$1-k+k^2 = \dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{1}{2}-k\right)^2 > 0$ なので

$$(*) \iff 2(1-4k+4k^2) > 1-k+k^2$$

$$\therefore \quad 7k^2 - 7k + 1 > 0$$

$$\therefore \quad k < \frac{7-\sqrt{21}}{14} \text{ または } \frac{7+\sqrt{21}}{14} < k$$

である．$0 < k < \dfrac{1}{2}$ とあわせると，k に関する条件は

$$\boldsymbol{0 < k < \frac{7-\sqrt{21}}{14}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．