三角形 ABC において，AB $=6$, BC $=4$, CA $=5$，外心を O とする．また，三角形 ABC の外接円と線分 BO の延長の交点のうち B でないものを D，辺 AB の延長と線分 CD の延長の交点を E，辺 AC と線分 BD の交点を F，辺 BC と線分 EF の延長の交点を G とする．このとき，AE $=\dfrac{10}{9}$ となる．

(1) 三角形 ABC の外接円の半径を求めよ．
(2) 線分 DE の長さを求めよ．
(3) EF : FG を求めよ．

(21 青森公立大 4)

---

【答】

(1) $\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

(2) DE $=\dfrac{32\sqrt{7}}{63}$

(3) EF : FG $=13:27$

---

【解答】

(1) 三角形 ABC で余弦定理を用いると

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{36+16-25}{2\cdot 6\cdot 4}=\frac{9}{16}$$

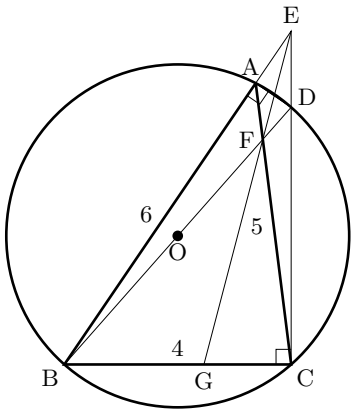
$0^\circ<\angle\mathrm{ABC}<180^\circ$ より

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\left(\frac{9}{16}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

三角形 ABC の外接円の半径 $R$ は，正弦定理より

$$R=\frac{\mathrm{CA}}{2\sin\angle\mathrm{ABC}}$$
$$=\frac{5}{2\cdot\dfrac{5\sqrt{7}}{16}}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{7}}{7}}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．




(2) 三角形 ABD において BD は外接円の直径であるから

$$\mathrm{BD}=2R=\frac{16\sqrt{7}}{7}$$

また，三角形 ABD は $\angle$BAD が直角の直角三角形であるから

$$\mathrm{AD}=\sqrt{\left(\frac{16\sqrt{7}}{7}\right)^2-6^2}=\frac{2\sqrt{64\cdot 7-9\cdot 49}}{7}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

三角形 ADE は $\angle$EAD が直角の直角三角形であるから

$$\mathrm{DE}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2+\left(\frac{10}{9}\right)^2}=\frac{2\sqrt{7\cdot 81+25\cdot 49}}{63}$$
$$=\frac{2\sqrt{7\cdot 256}}{63}=\boldsymbol{\frac{32\sqrt{7}}{63}}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- E について方べきの定理を用いる．

$$\mathrm{EA}\cdot\mathrm{EB}=\mathrm{ED}\cdot\mathrm{EC}$$

△EBC は ∠ECB が直角の直角三角形であるから

$$\mathrm{EA}\cdot\mathrm{EB}=\mathrm{ED}\cdot\mathrm{EB}\sin\angle\mathrm{ABC}$$

$$\therefore\quad \mathrm{DE}=\frac{\mathrm{EA}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=\frac{\frac{10}{9}}{\frac{5\sqrt{7}}{16}}=\frac{32}{9\sqrt{7}}=\frac{32\sqrt{7}}{63}$$

である．

(3) 三角形 BGE と線分 AC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FG}}\cdot\frac{\mathrm{GC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}}=1$$

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FG}}\cdot\frac{\mathrm{GC}}{4}\cdot\frac{6}{\frac{10}{9}}=1$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FG}}=\frac{20}{27}\cdot\frac{1}{\mathrm{GC}}$$

GC の長さを求める．まず，三角形 BCD は ∠BCD が直角の直角三角形であるから

$$\mathrm{CD}=\sqrt{\left(\frac{16\sqrt{7}}{7}\right)^2-4^2}=\frac{4\sqrt{16\cdot 7-7^2}}{7}=\frac{12\sqrt{7}}{7}$$

三角形 BCE にチェバの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GC}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DE}}\cdot\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{AB}}=1$$

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{CG}}\cdot\frac{\frac{12\sqrt{7}}{7}}{\frac{32\sqrt{7}}{63}}\cdot\frac{\frac{10}{9}}{6}=1$$

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{CG}}\cdot\frac{27}{8}\cdot\frac{5}{27}=1\qquad\therefore\quad \mathrm{BG}:\mathrm{CG}=8:5$$

$$\therefore\quad \mathrm{CG}=\frac{5}{13}\mathrm{BC}=\frac{5}{13}\cdot 4=\frac{20}{13}$$

よって

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FG}}=\frac{20}{27}\cdot\frac{13}{20}=\frac{13}{27}\qquad\therefore\quad \mathrm{EF}:\mathrm{FG}=\mathbf{13:27}$$ ……(答)

である．