$a > b > 0$ として，座標平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を C とおく．C 上の点 $\mathrm{P}(p_1,\ p_2)$ $(p_2 \neq 0)$ における C の接線を l，法線を n とする．

(1) 接線 l および法線 n の方程式を求めよ．

(2) 2 点 $\mathrm{A}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，$\mathrm{B}(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ に対して，法線 n は $\angle\mathrm{APB}$ の二等分線であることを示せ．

(21 お茶の水女大 理 (数・物・情) 5)

【答】

(1) $l : \dfrac{p_1x}{a^2} + \dfrac{p_2y}{b^2} = 1$，$n : \dfrac{p_2}{b^2}x - \dfrac{p_1}{a^2}y = \dfrac{a^2-b^2}{a^2b^2}p_1p_2$

(2) 略

【解答】

$$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$$

(1) 楕円 C 上の点 $\mathrm{P}(p_1,\ p_2)$ $(p_2 \neq 0)$ における接線 l の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{p_1x}{a^2} + \frac{p_2y}{b^2} = 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

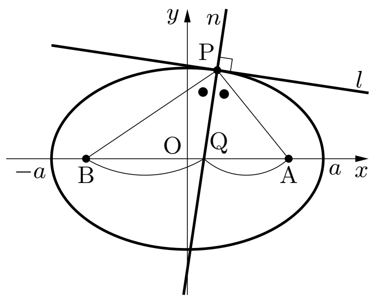
であり，法線 n の方程式は

$$\frac{p_2}{b^2}(x-p_1) - \frac{p_1}{a^2}(y-p_2) = 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{p_2}{b^2}x - \frac{p_1}{a^2}y = \frac{a^2-b^2}{a^2b^2}p_1p_2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 法線 n が $\angle\mathrm{APB}$ の二等分線であることを示すには，n と x 軸との交点を Q とおくとき



$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \mathrm{AQ} : \mathrm{QB}$$

が成り立つことを示せばよい．

$\sqrt{a^2-b^2} = c$ とおくと

$$\mathrm{A}(c,\ 0), \quad \mathrm{B}(-c,\ 0)$$

である．

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}^2 &= (p_1-c)^2 + {p_2}^2 \\
&= ({p_1}^2 - 2cp_1 + c^2) + b^2\left(1 - \frac{{p_1}^2}{a^2}\right) \quad \left(\because\ \frac{{p_1}^2}{a^2} + \frac{{p_2}^2}{b^2} = 1\right) \\
&= \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right){p_1}^2 - 2cp_1 + b^2 + c^2 \\
&= \frac{c^2}{a^2}{p_1}^2 - 2cp_1 + a^2 \quad (\because\ a^2 - b^2 = c^2) \\
&= \left(\frac{c}{a}p_1 - a\right)^2
\end{aligned}$$

ここで，$p_2 \neq 0$ より $-a < p_1 < a$ であり，また $\dfrac{c}{a} > 0$ であるから

$$\frac{c}{a}p_1 - a < \frac{c}{a}\cdot a - a = c - a = \sqrt{a^2-b^2} - a < 0$$

である．したがって

$$\mathrm{AP} = a - \frac{c}{a}p_1$$

である．また，楕円の定義から $\mathrm{AP} + \mathrm{PB} = 2a$ であるから

$$\mathrm{PB} = 2a - \mathrm{AP} = 2a - \left(a - \frac{c}{a}p_1\right) = a + \frac{c}{a}p_1$$

であり

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \left(a - \frac{c}{a}p_1\right) : \left(a + \frac{c}{a}p_1\right) = (a^2 - cp_1) : (a^2 + cp_1)$$

である．

また，Q の x 座標は，(1) より

$$\frac{p_2}{b^2}x = \frac{a^2 - b^2}{a^2b^2}p_1p_2$$

$$\therefore \quad x = \frac{c^2}{a^2}p_1 \quad (\because \ \sqrt{a^2 - b^2} = c)$$

であるから

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = \left(c - \frac{c^2}{a^2}p_1\right) : \left(\frac{c^2}{a^2}p_1 - (-c)\right) = (a^2 - cp_1) : (a^2 + cp_1)$$

である．よって

$$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = \mathrm{AQ} : \mathrm{BQ}$$

が成り立つから，n は $\angle\mathrm{APB}$ の二等分線である．　　　　…… (証明終わり)