回転，面積

以下の問いに答えなさい．

(1) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ を原点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転して得られる点の座標を $(x',\ y')$ とする．x'，y' を x，y を用いて表しなさい．

(2) 双曲線 $x^2-y^2=1$ を原点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転して得られる図形の方程式を求めなさい．

(3) 双曲線 $x^2-y^2=1$ 上に点 $\mathrm{A}\left(a,\ \sqrt{a^2-1}\right)$ $(a>1)$ をとる．原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と結んだ線分 OA と双曲線 $x^2-y^2=1$ 及び x 軸で囲まれた図形の面積 S が

$$S=\frac{1}{2}\log(a+\sqrt{a^2-1})$$

と表されることを示しなさい．

(21 大分大 医 1)

【答】

(1) $\begin{cases} x'=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \\ y'=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$

(2) $xy=\dfrac{1}{2}$

(3) 略

【解答】

(1) 点 $(x',\ y')$ は点 $(x,\ y)$ を原点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転したものであるから，複素数平面上で考えると

$$\begin{aligned} x'+y'i &= \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(x+yi) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)(x+yi)=\frac{x-y}{\sqrt{2}}+\frac{x+y}{\sqrt{2}}i \end{aligned}$$

であり

$$\begin{cases} \boldsymbol{x'=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}} \\ \boldsymbol{y'=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $x^2-y^2=1$ ……① の上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，P を原点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転して得られる点を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とすると，(1) より

$$\begin{cases} x-y=\sqrt{2}x' \\ x+y=\sqrt{2}y' \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} x=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{-x'+y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

である．① に代入して

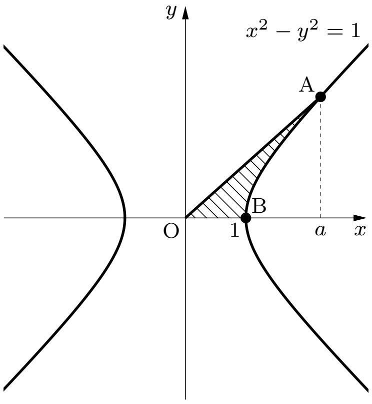
$$\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2=1 \qquad \therefore \quad x'y'=\frac{1}{2}$$

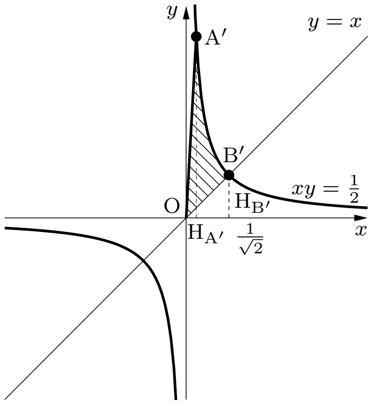
よって，求める図形の方程式は

$$\boldsymbol{xy=\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \sqrt{a^2-1}\right)$ と点 $\mathrm{B}(1,\ 0)$ を原点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転して得られる点は，(1) より，それぞれ $\mathrm{A}'\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}},\ \dfrac{a+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}\right)$，$\mathrm{B}'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である．





回転移動では面積不変であるから，求める面積 S(上図左の斜線部分の面積) は，上図右の斜線部分の面積に等しい．A',B' から x 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ $\mathrm{H_{A'}}$，$\mathrm{H_{B'}}$ とすると

$$\begin{aligned}
S&=\triangle\mathrm{OA'H_{A'}}+\int_{\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2x}\,dx-\triangle\mathrm{OB'H_{B'}}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\Big[\log|x|\Big]_{\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\log\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{4}\\
&=\frac{1}{2}\log\frac{1}{a-\sqrt{a^2-1}}\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．