2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は $\vec{0}$ ではなく，また平行でないとする．このとき，等式 $(s+1)\vec{a}+2t\vec{b}=t\vec{a}+(s+3)\vec{b}$ を満たす実数 s, t の値を求めよ．

(21 広島工大)

【答】 $s=1,\ t=2$

【解答】

$$(s+1)\vec{a}+2t\vec{b}=t\vec{a}+(s+3)\vec{b} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$(s-t+1)\vec{a}+(2t-s-3)\vec{b}=\vec{0} \qquad \cdots\cdots ①'$$

①′ において，$s-t+1 \neq 0$ と仮定すると，①′ は

$$\vec{a}=-\frac{2t-s-3}{s-t+1}\vec{b}$$

$2t-s-3=0$ と仮定すると $\vec{a}=\vec{0}$ となり，$\vec{a} \neq \vec{0}$ に反する．

$2t-s-3 \neq 0$ と仮定すると $\vec{a} \parallel \vec{b}$ となり，$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ に反する．

いずれにせよ不合理な結論となる．したがって

$$s-t+1=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

である．

このとき，① は

$$(2t-s-3)\vec{b}=\vec{0}$$

となる．$\vec{b} \neq \vec{0}$ より

$$2t-s-3=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

である．②, ③ より

$$\begin{cases} t-s=1 \\ 2t-s=3 \end{cases} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{s=1,\ t=2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 一般に

$$「2 つのベクトル\vec{a},\ \vec{b}が\vec{0}ではなく，また平行でない」 \qquad \cdots\cdots (*)$$

$$\Longleftrightarrow 「\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0} \text{ ならば, } \alpha=\beta=0」 \qquad \cdots\cdots (**)$$

であり，これは

$$「\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b}ならば,\ \begin{cases} \alpha=\alpha' \\ \beta=\beta' \end{cases} 」 \qquad \cdots\cdots (***)$$

と表すことができる．

$(*)$ のとき (同値なので $(**)$ のときと言ってもよい)$\vec{a}$, $\vec{b}$ は 1 次独立であるといい，これにより表現の一意性が保証 $(***)$ されるのである．

- 教科書ではこれらのことを図形的に説明して,「$(*)$ ならば，平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ は $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ として 1 通りに表すことができる」と記されている．

  これを認めて (教科書に記されているのだから)，答案としては

  $\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$，$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ であるから，① より

$$\begin{cases} s+1=t \\ 2t=s+3 \end{cases} \qquad \therefore \quad s=1,\ t=2$$

としてもよいだろう．どこまでを仮定して，答案を書くか，判断に苦慮するところである．ここでは与えられた条件のみを用いた解答を記しておいた．