1 辺の長さが 1 の正六角形 OABCDE において，線分 AC を 3 : 1 に内分する点を P とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{(5)}$ である．また，$\triangle$OBP の面積は $\boxed{(6)}$ である．

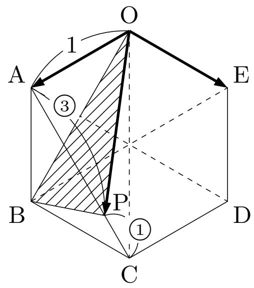
(21 福岡大 医 1(3))

【答】

(5)	(6)
$\dfrac{7\overrightarrow{\mathrm{OA}}+6\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{4}$	$\dfrac{5\sqrt{3}}{16}$

【解答】

P は線分 AC を 3 : 1 に内分する点であるから



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{4}\\ &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\times 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}})}{4}\\ &= \boldsymbol{\frac{7\overrightarrow{\mathrm{OA}}+6\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{4}}\end{aligned}$$

……(答)

また

$$\triangle\mathrm{OBP} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}})^2}$$

である．ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}) = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OE}}| = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 1\times 1\times\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = |2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2 = 4+2\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1 = 3$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \frac{1}{16}\left\{49+2\times 42\times\left(-\frac{1}{2}\right)+36\right\} = \frac{43}{16}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}})\cdot\left(\frac{7\overrightarrow{\mathrm{OA}}+6\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{4}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left\{14+19\times\left(-\frac{1}{2}\right)+6\right\} = \frac{21}{8}\end{aligned}$$

である．よって

$$\triangle\mathrm{OBP} = \frac{1}{2}\sqrt{3\times\frac{43}{16}-\left(\frac{21}{8}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{75}{64}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{16}}$$

……(答)

である