三角形 ABC の外接円の中心を D とし，点 E は $\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を満たすとする．また，頂点 A と辺 BC の中点を通る直線が頂点 B と辺 CA の中点を通る直線と交わる点を F とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ．
(2) 直線 AE は直線 BC と垂直に交わることを示せ．
(3) 点 E と点 F が異なるとき，線分の長さの比 DF : EF を求めよ．
(4) 点 E と点 F が等しいとき，辺の長さの比 AB : AC を求めよ．

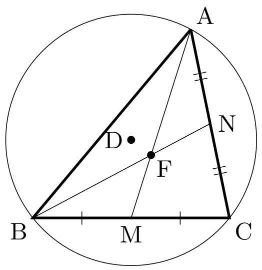
(21 大阪府大 現シス・地保 3)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) DF : EF = 1 : 2
(4) 1 : 1

【解答】

(1) 辺 BC，辺 CA の中点を，それぞれ M，N とする．F は中線 AM，BN の交点であるから，△ABC の重心である．
重心の公式より



$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$$
$$3\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FB}})+(\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FC}})$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AF}}=-\overrightarrow{\mathrm{BF}}-\overrightarrow{\mathrm{CF}}$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\vec{0}$$
…… (証明終わり)

- 「～が成り立つことを示せ.」とあることから,「公式により～」はよくないと解釈すると，F が △ABC の重心であること，あるいは AF : FM = 2 : 1 なども使わずに，2 直線の交点として F をとらえることになる．すなわち，F が 2 直線の交点であることから，2 通りの表現をつくり，1 次独立性を利用することになる．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ を示す.

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{DE}} \quad \cdots\cdots ①$$

より，始点を D にとると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=(\overrightarrow{\mathrm{DE}}-\overrightarrow{\mathrm{DA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}})\\&=(\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|^2\\&=0\quad(\because\ \text{D は △ABC の外心より，}|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|)\end{aligned}$$

直線 AE が存在しているので，A $\fallingdotseq$ E であり，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\fallingdotseq\vec{0}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\fallingdotseq\vec{0}$ でもから

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

すなわち，直線 AE は直線 BC と垂直に交わる．…… (証明終わり)

- 同じく，① を満たす E に対して
$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$
が成り立つ．すなわち，E は △ABC の垂心である．

(3) ① の左辺について，始点を F にとると

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{DE}} &= (\overrightarrow{\mathrm{FA}} - \overrightarrow{\mathrm{FD}}) + (\overrightarrow{\mathrm{FB}} - \overrightarrow{\mathrm{FD}}) + (\overrightarrow{\mathrm{FC}} - \overrightarrow{\mathrm{FD}}) \\
&= (\overrightarrow{\mathrm{FA}} + \overrightarrow{\mathrm{FB}} + \overrightarrow{\mathrm{FC}}) - 3\overrightarrow{\mathrm{FD}} \\
&= -(\overrightarrow{\mathrm{AF}} + \overrightarrow{\mathrm{BF}} + \overrightarrow{\mathrm{CF}}) + 3\overrightarrow{\mathrm{DF}} \\
&= 3\overrightarrow{\mathrm{DF}} \quad (\because\ (1)) \qquad \cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって，E と F が異なるとき，D, F, E はこの順に一直線上に並び

$$\mathrm{DF} : \mathrm{EF} = 1 : (3-1) = \mathbf{1 : 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) AF は BC の中点 M を通り，(2) より AE は BC と垂直であるから，E と F が等しいとき，AF(AE) は BC の垂直二等分線である．

したがって，AB = AC であり

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathbf{1 : 1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- E と F が等しいとき，② より

  $$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = 3\overrightarrow{\mathrm{DF}} \qquad \therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{DF}} = \vec{0} \qquad \therefore\quad \mathrm{D} = \mathrm{F}$$

  外心 D と重心 F が一致するから，△ABC は正三角形であり

  $$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 1 : 1$$

  である．

- 本問の △ABC において，D は外心，F は重心，E は垂心である．これらは一直線上に並び DF : EF = 1 : 2 が成り立つことはよく知られた事実である．この直線はオイラー線と呼ばれている．