

$\triangle OAB$ において、辺 OA を $7:4$ に内分する点を C 、辺 OB を $9:1$ に内分する点を D とし、線分 AD と線分 BC の交点を E とする。さらに、直線 OE と辺 AB の交点を F とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ とするとき、 \vec{OE} を \vec{a} と \vec{b} で表せ。
 (2) $\triangle BEF$ の面積が 28 であるとき、 $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

(21 岩手大 教育・農 2)

【答】

(1) $\vec{OE} = \frac{7}{47}\vec{a} + \frac{36}{47}\vec{b}$

(2) 2021

【解答】

- (1) E は直線 AD 上の点であるから、実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= (1-s)\vec{OA} + s\vec{OD} \\ &= (1-s)\vec{a} + \frac{9s}{10}\vec{b} \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

と表すことができる。また、 E は直線 BC 上の点でもあるから、実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= (1-t)\vec{OB} + t\vec{OC} \\ &= \frac{7t}{11}\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$

と表すことができる。 \vec{a} 、 \vec{b} は 1 次独立であるから、①、②を比較して

$$\begin{cases} 1-s = \frac{7t}{11} \\ \frac{9s}{10} = 1-t \end{cases} \iff \begin{cases} 11s + 7t = 11 \\ 9s + 10t = 10 \end{cases}$$

$$\therefore s = \frac{40}{47}, \quad t = \frac{11}{47}$$

である。よって

$$\vec{OE} = \frac{7}{47}\vec{a} + \frac{36}{47}\vec{b} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- $\triangle OBC$ と直線 DE についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{DE}{EA} \times \frac{AC}{CO} \times \frac{OB}{BD} = 1$$

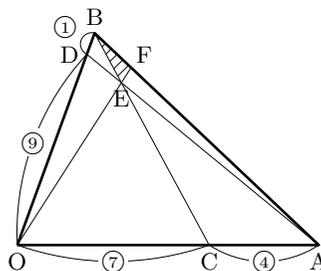
$$\frac{DE}{EA} \times \frac{4}{7} \times \frac{10}{1} = 1$$

$$\therefore DE : EA = 7 : 40$$

であるから

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= \frac{7\vec{OA} + 40\vec{OD}}{47} \\ &= \frac{7}{47}\vec{a} + \frac{40}{47} \times \frac{9}{10}\vec{b} \\ &= \frac{7}{47}\vec{a} + \frac{36}{47}\vec{b}\end{aligned}$$

である。



(2) (1) より

$$\overrightarrow{OE} = \frac{43}{47} \times \frac{7\vec{a} + 36\vec{b}}{43}$$

$\frac{7\overrightarrow{OA} + 36\overrightarrow{OB}}{43}$ の終点は、線分 AB を 36 : 7 に内分する点であるから、直線 AB 上の点であり、また、直線 OE 上の点でもあるから F である。すなわち $\overrightarrow{OE} = \frac{43}{47}\overrightarrow{OF}$ である。

$$OF : FE = 47 : 4, \quad AF : FB = 36 : 7$$

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \frac{47}{4} \triangle EAB \\ &= \frac{47}{4} \times \frac{43}{7} \triangle EFB \\ &= \frac{47}{4} \times \frac{43}{7} \times 28 \\ &= \mathbf{2021} \end{aligned}$$

……(答)

である。