座標平面上の 3 点 O，A，B は

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 3, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1, \quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 2\sqrt{3}$$

を満たすとする．また同一平面上の点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$$

を満たしながら動くとする．次の問いに答えよ．

(1) 実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表すとき，s がとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 点 P が直線 OB 上にないとき，三角形 OBP の面積の最大値を求めよ．

(21 弘前大 理工 6)

【答】

(1) $\dfrac{2-\sqrt{6}}{4} \leqq s \leqq \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

【解答】

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 2\sqrt{3}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 12$$
$$1 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 9 = 12$$
$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -1$$

である．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$$
$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 0$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\{(s-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\} \cdot \{s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (t-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\} = 0$$
$$9(s-1)s - \{(s-1)(t-1) + st\} + t(t-1) = 0$$
$$9(s^2 - s) - (2st - s - t + 1) + (t^2 - t) = 0$$
$$t^2 - 2st + 9s^2 - 8s - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

P が存在する条件は ① を満たす実数 s, t が存在することである．① を t についての 2 次方程式とみると，t は実数だから，(判別式) $\geqq 0$ である．

$$s^2 - (9s^2 - 8s - 1) \geqq 0$$
$$8s^2 - 8s - 1 \leqq 0$$

よって，s のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{2-\sqrt{6}}{4} \leqq s \leqq \frac{2+\sqrt{6}}{4}}$$

……(答)

である．

(2) P が OB 上にないことから $s \neq 0$

三角形 OBP の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}})^2}$$

である．ここで

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = |s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 9s^2 - 2st + t^2$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = -s + t$$

であるから

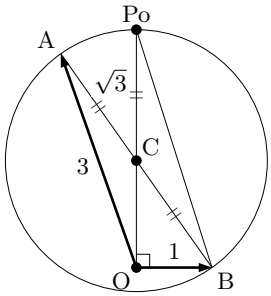
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{1\times(9s^2 - 2st + t^2) - (-s+t)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{8s^2} \\ &= \sqrt{2}|s| \end{aligned}$$

(1) の結果および $s \neq 0$ より，$0 < |s| \leqq \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}$ だから，S は $s = \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}$ のとき

$$\text{最大値}\quad \sqrt{2}\times\frac{2+\sqrt{6}}{4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

- $\angle\mathrm{APB} = 90^\circ$ より，点 P は AB を直径とする円周上を動く．AB の中点 (円の中心) を C，OC の延長と円との交点を $\mathrm{P_0}$ とおくと，条件から右図のようになる．



$$\mathrm{OC} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$$

であり，S は P が $\mathrm{P_0}$ と一致するときに最大となる．よって，S の最大値は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathrm{OB}\times\mathrm{OP_0} &= \frac{1}{2}\times 1\times(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である．