点 O を中心とする半径 1 の円に内接する三角形 ABC において

$$-5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+7\overrightarrow{\mathrm{OB}}+8\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

が成り立っているとする．また直線 OA と直線 BC の交点を P とする．このとき線分 BC，OP の長さを求めると BC = $\boxed{(あ)}$，OP = $\boxed{(い)}$ である．さらに三角形 ABC の面積は $\boxed{(う)}$ である．

(21 慶應大 医 1(1))

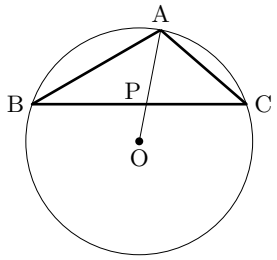
【答】

(あ)	(い)	(う)
$\dfrac{5\sqrt{5}}{7}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

【解答】

$$-5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+7\overrightarrow{\mathrm{OB}}+8\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

$$5\overrightarrow{\mathrm{OA}}=7\overrightarrow{\mathrm{OB}}+8\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \cdots\cdots ①$$



① の辺々の大きさを平方すると

$$25|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=49|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+112\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+64|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ より

$$25=49+112\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+64$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{25-113}{112}=-\frac{11}{14}$$

である．したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

$$=1-2\times\left(-\frac{11}{14}\right)+1=\frac{25}{7}$$

$$\therefore\quad \mathrm{BC}=\frac{5}{\sqrt{7}}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{7}}{7}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．① は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{7\overrightarrow{\mathrm{OB}}+8\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{5}=3\times\frac{7\overrightarrow{\mathrm{OB}}+8\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{15}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{7\overrightarrow{\mathrm{OB}}+8\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{15}$ とおく．X は BC を 8 : 7 に内分する点であるから，直線 BC 上の点である．かつ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ であるから，X は直線 OA 上の点でもある．したがって，X は直線 OA と直線 BC の交点 P と一致する．

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}=3\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$\therefore\quad \mathrm{OP}=\frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\boldsymbol{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．さらに

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

である．ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{7\overrightarrow{\mathrm{OB}}+8\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{5}=-\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+8\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{5}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{7\overrightarrow{\mathrm{OB}}+8\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{5}=-\frac{7\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{5}$$

であり

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = \frac{1}{25}\left\{4 + 2 \times 16 \times \left(-\frac{11}{14}\right) + 64\right\} = \frac{68 \times 7 - 16 \times 11}{25 \times 7} = \frac{12}{7}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = \frac{1}{25}\left\{49 + 2 \times 21 \times \left(-\frac{11}{14}\right) + 9\right\} = \frac{58 \times 7 - 21 \times 11}{25 \times 7} = 1$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{1}{25}\left\{14 + 62 \times \left(-\frac{11}{14}\right) + 24\right\} = \frac{38 \times 7 - 31 \times 11}{25 \times 7} = -\frac{3}{7}$$

であるから

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12}{7} \times 1 - \left(-\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{84-9}}{7} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{14}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.