△OAB において，OA $=3$，OB $=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$ とする．△OAB の内接円の中心を I とする．直線 OI と辺 AB との交点を P，△OAB の内接円と辺 AB との接点を Q とする．

(1) △OAB の面積 S を求めよ．
(2) 線分 AB の長さを求めよ．
(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を，それぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．
(4) 線分 PQ の長さを求めよ

(21 滋賀県大 工・環境科学 1)

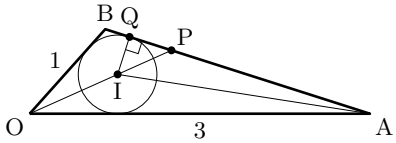
【答】

(1) $S=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
(2) $\mathrm{AB}=\sqrt{6}$
(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}$，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{4-\sqrt{6}}{10}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$
(4) $\mathrm{PQ}=\dfrac{4-\sqrt{6}}{4}$

【解答】

$$\mathrm{OA}=3,\ \mathrm{OB}=1,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ① より



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3^2\times1^2-2^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(2) ① より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \\ &= \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2} \\ &= \sqrt{1^2-2\times2+3^2} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{6}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(3) OI は ∠AOB の二等分線であるから

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=3:1$$

であり

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また，AI は ∠OAP の二等分線であるから

$$\mathrm{OI}:\mathrm{IP}=\mathrm{OA}:\mathrm{AP}=\mathrm{OA}:\frac{3}{4}\mathrm{AB}=3:\left(\frac{3}{4}\times\sqrt{6}\right)=4:\sqrt{6}$$

である．

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{4}{4+\sqrt{6}}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{4(4-\sqrt{6})}{10}\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{4-\sqrt{6}}{10}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}})} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) IQ は △OAB の内接円の半径であり

$$S = \frac{1}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{AB}+\mathrm{OB})\mathrm{IQ}$$

が成り立つ．(1)，(2) の結果より

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}(3+\sqrt{6}+1)\mathrm{IQ}$$
$$\therefore \quad \mathrm{IQ} = \frac{\sqrt{5}}{4+\sqrt{6}}$$

である．また，(3) より

$$\mathrm{IP} = \frac{\sqrt{6}}{4+\sqrt{6}}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \frac{\sqrt{6}}{4+\sqrt{6}}\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}\right|$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4(4+\sqrt{6})}\sqrt{3^2+6\times 2+3^2\times 1^2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4(4+\sqrt{6})}\sqrt{30}$$
$$= \frac{3\sqrt{5}}{2(4+\sqrt{6})}$$

よって

$$\mathrm{PQ} = \sqrt{\mathrm{IP}^2-\mathrm{IQ}^2} = \frac{\sqrt{5}}{4+\sqrt{6}}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-1^2} = \frac{\sqrt{5}}{4+\sqrt{6}}\sqrt{\frac{5}{4}}$$
$$= \frac{5}{2(4+\sqrt{6})}$$
$$= \boldsymbol{\frac{4-\sqrt{6}}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．