OA $=5$, OB $=4$, $\angle$AOB $=60^\circ$ である $\triangle$OAB において，辺 OA を $1:2$ に内分する点を C，辺 OB を $2:1$ に内分する点を D とする．また，直線 AD と直線 BC の交点を P とし $\triangle$OAB の垂心を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) $\triangle$OAB の重心を G とするとき，3 点 G，H，P は一直線上にあることを示し，GH : HP を求めよ．

(21 福井大 工 1)

【答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{7}\vec{a}+\dfrac{4}{7}\vec{b}$

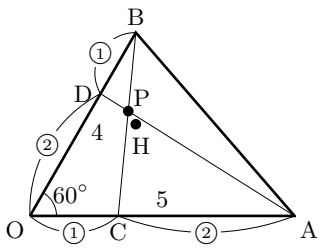
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

(3) 証明略．GH : HP $=7:3$

【解答】

(1) P は直線 AD 上の点であるから，実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}\qquad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$



と表すことができる．また，P は直線 BC 上の点でもあるから，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{1}{3}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\qquad\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

と表すこともできる．$\vec{a}$, $\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①, ② の係数を比較して

$$\begin{cases}1-s=\dfrac{1}{3}(1-t)\\[2mm]\dfrac{2}{3}s=t\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}3s-t=2\\[2mm]2s-3t=0\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}s=\dfrac{6}{7}\\[2mm]t=\dfrac{4}{7}\end{cases}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

- ① を次のように処理してもよい．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}\qquad\cdots\cdots ①\\&=(1-s)\left(3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)+\frac{2}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

P は直線 BC 上の点でもあるから

$$3(1-s)+\frac{2}{3}s=1\qquad\therefore\quad 3-\frac{7}{3}s=1\qquad\therefore\quad s=\frac{6}{7}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$$

である．

- △OBC と直線 AD でメネラウスの定理を用いると

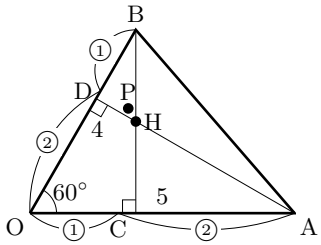
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} \times \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BO}} \times \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CA}} = 1$$
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = 1$$
$$\therefore \quad \mathrm{AP} : \mathrm{PD} = 6 : 1$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 6\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{7} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}\vec{b}\right) = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b}$$

である．

(2) H は実数 α, β を用いて



$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

とおくことができる．BH ⊥ OA, AH ⊥ OB より

$$(*) \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \{\alpha\vec{a} + (\beta - 1)\vec{b}\} \cdot \vec{a} = 0 \\ \{(\alpha - 1)\vec{a} + \beta\vec{b}\} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}$$

$|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \times 4 \times \cos 60^\circ = 10$ より

$$(*) \iff \begin{cases} 25\alpha + 10(\beta - 1) = 0 \\ 10(\alpha - 1) + 16\beta = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} 5\alpha + 2\beta = 2 \\ 5\alpha + 8\beta = 5 \end{cases} \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{1}{5},\ \beta = \frac{1}{2}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) G は △OAB の重心であるから

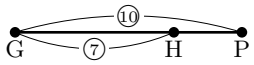
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

である．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{GH}} = \left(\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = -\frac{2}{15}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} = \frac{1}{30}(-4\vec{a} + 5\vec{b})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{GP}} = \left(\frac{1}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b}\right) - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = -\frac{4}{21}\vec{a} + \frac{5}{21}\vec{b} = \frac{1}{21}(-4\vec{a} + 5\vec{b})$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{GH}} = \frac{21}{30}\overrightarrow{\mathrm{GP}} = \frac{7}{10}\overrightarrow{\mathrm{GP}}$$



が成り立つから，3 点 G，H，P は一直線上にあり　　……(証明終わり)

$$\boldsymbol{\mathrm{GH} : \mathrm{HP} = 7 : 3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．