座標平面上の異なる 2 点 A，B に対し，原点 O が線分 AB の中点になっている．以下の問に答えなさい．

(1) 点 P が $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0$ を満たしながら動いているとき，点 P の動く軌跡を答えなさい．

(2) 点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ を満たしながら動いているとき，点 Q の動く軌跡を答えなさい．

(3) 点 A の座標が $(1,\ 0)$，点 B の座標が $(-1,\ 0)$ であり，点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ を満たしながら動いているとき，$|\overrightarrow{\mathrm{QA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{QB}}|^2$ の最大値と最小値を求めなさい．

(21 福岡女大 国際文理 (教養・環境) 3)

【答】

(1) O を中心とする半径 OA の円

(2) O を中心とする半径 2OA の円

(3) 最大値 25，最小値 9

【解答】

原点 O は線分 AB の中点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{0} \qquad \cdots\cdots ①$$

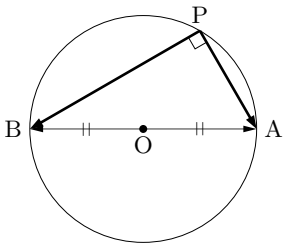
が成り立つ．

(1) 始点を O にとると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}) \quad (\because ①)\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

であるから，与えられた条件は

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0\\\iff&|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=0\\\iff&|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\end{aligned}$$



と変形される．よって，点 P の軌跡は

O を中心とする半径 OA の円 ……(答)

である．

(2) (1) と同じく変形すると

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&\qquad(\because ②\text{における P を Q とした．および ① を用いた})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\end{aligned}$$

であるから，与えられた条件は

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\\\iff&|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=0\\\iff&|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \qquad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

と変形される．これを満たす点 Q の軌跡は

O を中心とする半径 2OA の円 ……(答)

である．

(3) A(1, 0)，B(−1, 0) であり，Q の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$$③ \iff x^2+y^2=4 \qquad \cdots\cdots ③'$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}&|\overrightarrow{\mathrm{QA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{QB}}|^2\\&=\{(x-1)^2+y^2\}\{(x+1)^2+y^2\}\\&=(5-2x)(5+2x)\quad(\because\ ③')\\&=25-4x^2\end{aligned}$$

と表される．③′ より，x^2 の動く範囲は

$$0 \leqq x^2 \leqq 4$$

であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{QA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{QB}}|^2$ は

最大値 25，　最小値 9 ……(答)

をとる．