三角形OABにおいて，2つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$は$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$を満たすとする．実数$s$, tが

$$s \geqq 0, \quad t \geqq 0, \quad 2s+t \leqq 1$$

を満たすとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$と表されるような点Pの存在する範囲の面積は $\boxed{\text{キ}}$ である．

(21 立教大 文系 1(4))

【答】

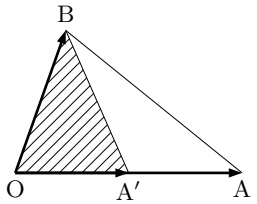
キ
$\sqrt{2}$

【解答】

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=2s\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

線分OAの中点をA′とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2s\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$



であり，s, tは

$$s \geqq 0, \quad t \geqq 0, \quad 2s+t \leqq 1$$

を満たすから，点Pは三角形OA′Bの内部および周を動く．

$$\triangle\mathrm{OA'B}=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{OAB}$$

である．ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$であるから

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{3^2\times 2^2-2^2}$$
$$=2\sqrt{2}$$

である．

よって，求める面積は

$$\triangle\mathrm{OA'B}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$$ ……(答)

である．